مکانیک:

تحلیل کمی نیروهای وارد بر جسم در حال تعادل را بحث می‌کند

جسم در حال تعادل ← ساکن Static

↓ متحرک Dynamic

مکانیک اجسام صلب (جامد)

مکانیک سیالات

مکانیک اجسام تغییر شکل پذیر

جسم صلب:

اگر جسمی بین ذراتش هیچ جابه‌جایی نسبی موجود نباشد این جسم را جسم صلب می‌گویند

کمیت‌ها:

اسکالر: کمیت‌های هستند که فقط مقدار دارند. «جرم، زمان، انرژی»

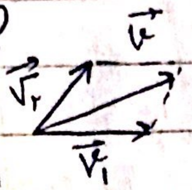
Scanned with CamScanner

Year. Month. Day. Subject.

برداری : کمیت هایی هستند که علاوه بر مقدار امتداد در جهت هم دارند (نیرو، حرکت، شتاب، گشتاور)

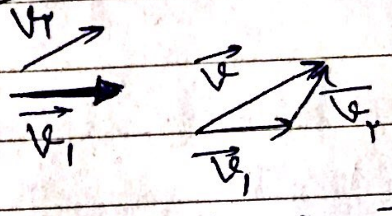
روش های جمع برداری :

۱- متوازی الاضلاع ← $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$ حاصل از بردارهای V_1 و V_2



$\vec{V}$ بردار
$|\vec{V}|$ اندازه بردار

۲- مثلثی
⇓



$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$

ابتدای بردار دوم از انتهای بردار اول شروع می شود

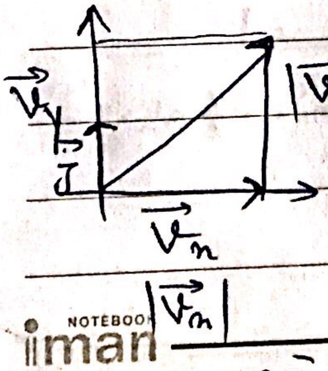
$\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_2} + \vec{V_1}$

جمع برداری قابلیت جابه جایی دارد.

بردارهای یکه :

بردارهایی است که اندازه بردار ۱ می باشد

$\vec{V_x}$ و $\vec{V_y}$ ← مولفه های برداری $\vec{V}$



$|\vec{V}| = \sqrt{|\vec{V_x}|^2 + |V_y|^2}$

جهت مثبت محور x $\theta = \tan^{-1}(\arctan)\left(\frac{|\vec{V_y}|}{|\vec{V_x}|}\right)$

Year. Month. Day. Subject.

بردار یکه:

$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{n_v}$

$\vec{v}$ ← بردار

$|\vec{v}|$ ↓ اندازه بردار

$\vec{n_v}$ ↓ بردار یکه

$\vec{n_v}$: بردار یکه : اندازه ۱ است و در جهت بردار اصلی $\vec{v}$ می باشد

$$n_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

مثال: زاویه ای که بردار $\vec{v} = -12\vec{i} + 5\vec{j}$

الف) با جهت مثبت محور x می سازد چقدر است.

ب) بردار یکه در امتداد $\vec{v}$ را بدست آورید.

الف) $\text{Arctan}\left(\frac{|5|}{|-12|}\right) = \text{Arctang}\left(\frac{5}{12}\right) \simeq 22{,}6^\circ$

$$\beta = \pi - \theta = 157{,}4^\circ$$

$$\vec{n_v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-12\vec{i} + 5\vec{j}}{\sqrt{(-12)^2 + (5)^2}} = -\frac{12}{13}\vec{i} + \frac{5}{13}\vec{j} = -0{,}92\vec{i} + 0{,}38\vec{j}$$

$$\sqrt{\left(-\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{169}{169}} = 1$$

Scanned with CamScanner

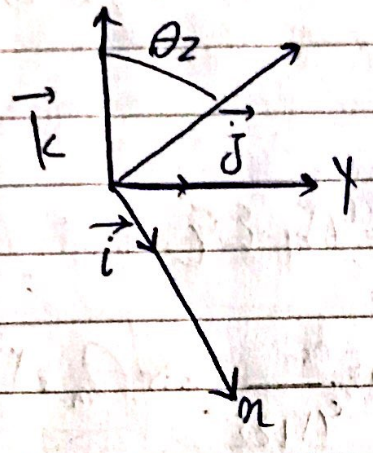
$$V = |\vec{V}| \cdot \vec{n_V}$$

$$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y} + \vec{V_z}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{|\vec{V_x}|^2 + |\vec{V_y}|^2 + |\vec{V_z}|^2}$$

$$\vec{V} = |\vec{V_x}| \cdot \vec{i} + |\vec{V_y}| \cdot \vec{j} + |\vec{V_z}| \cdot \vec{k}$$

$$\vec{V} = |\vec{V}| \cdot \cos\theta_x \cdot \vec{i} + |\vec{V}| \cdot \cos\theta_y \vec{j} + |\vec{V}| \cdot \cos\theta_z \vec{k}$$



Cos های هادی:

$\cos\theta_x$, $\cos\theta_y$ و $\cos\theta_z$

θ_x : زاویه بردار $\vec{V}$ با جهت مثبت x ها

θ_y : زاویه بردار $\vec{V}$ با جهت مثبت محور y ها

θ_z : زاویه بردار $\vec{V}$ با جهت مثبت محور z ها

$$\Rightarrow \vec{V} = |\vec{V}| \cdot l \vec{i} + |\vec{V}| \cdot m \vec{j} + |\vec{V}| \cdot n \vec{k}$$

(Cos های هادی) ⟸ l, m, n ⟸ $\boxed{l^2 + m^2 + n^2 = 1}$

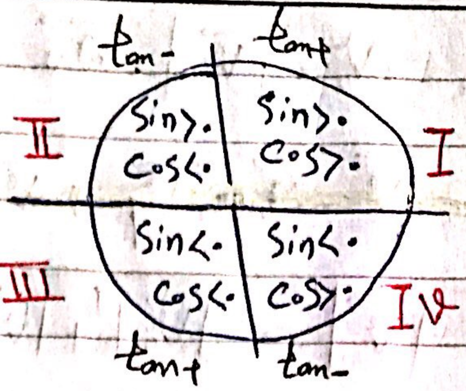
NOTEBOOK nan

Scanned with CamScanner

$|\vec{V}_x| = \cos\theta_x \, |\vec{V}|$

$|\vec{V}_y| = \cos\theta_y \, |\vec{V}|$

$|\vec{V}_z| = \cos\theta_z \, |\vec{V}|$



مثال: نیروی با بردار $\vec{F} = 50\vec{i} + 30\vec{j} - 25\vec{k}\,(N)$ مشخص شده است زاویه‌ای که بردار $\vec{F}$ با جهت مثبت محورهای x و y و z می‌سازد را حساب کنید.

$\vec{F} = 50\vec{i} + 30\vec{j} - 25\vec{k}$

$|\vec{V}| = \sqrt{(50)^2 + (30)^2 + (-25)^2} = 63.44$

$|\vec{F}_x| = |\vec{F}| \cos\theta_x \Rightarrow \cos\theta_x = \frac{50}{63.44} \Rightarrow \theta_x = 37.98^\circ$

$|\vec{F}_y| = |\vec{F}| \cos\theta_y \Rightarrow \cos\theta_y = \frac{30}{63.44} \Rightarrow \theta_y = 61.77^\circ$

$|\vec{F}_z| = |\vec{F}| \cos\theta_z \Rightarrow \cos\theta_z = \frac{25}{63.44} \Rightarrow \theta_z = 180 - \theta$

$\Rightarrow 180 - 60.79 = 13$

★ به خاطر علامت $-25k$ نتیجه‌ی کلی منفی است بنابراین در ربع دوم است

Year. Month. Day. Subject.

مقدماتی در مورد استاتیک .

(SI)

کمیت‌ها	نماد	واحد
جرم	M	kg
طول	L	m
زمان	T	S
نیرو	F	N

$W = mg$ ، $g \simeq ۹{,}۸۱ \; (m/s^۲)$

W ← وزن (N)

m ← جرم

g ← شتاب جاذبه گرانش

θ زاویه کوچک $\theta \to 0$

$\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$

$\cos\theta \simeq 1$

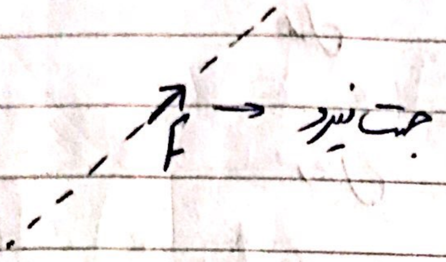
NOTEBOOK
nan

Scanned with CamScanner

فصل دوم:

نیروها:

نیرو یک کمیت برداری است. F علاوه بر مقدار (اندازه) راستا، امتداد و جهت دارد.

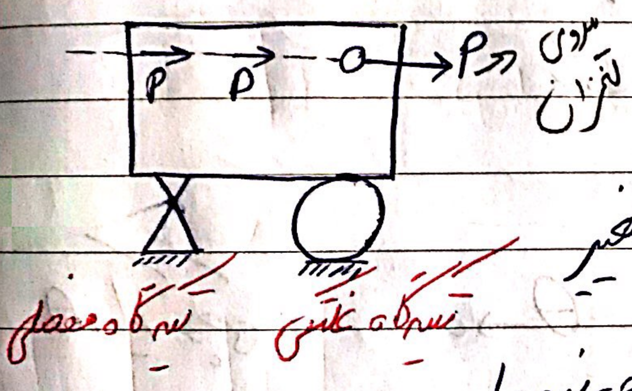


و همچنین که برای جمع کردن نیروها می توان از قانون متوازی الاضلاع استفاده کرد و برای استفاده از آن مقدار و جهت آن را مشخص کرد.

امتداد نیرو = خط حامل

امتداد نیرو است

اصل انتقال پذیری نیروها:

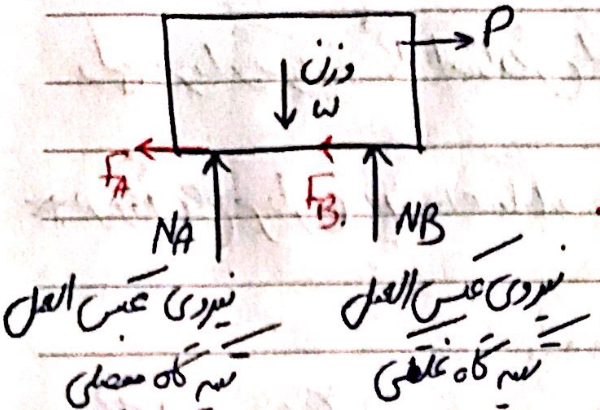


نیرو می تواند در هر نقطه از خط اثرش جابه جا شود بدون آنکه اثرات خارجی آن روی جسم صلب تغییر کند. بنابراین وقتی قرار است اثرات خارجی نیروها را بررسی کنیم می توان آن ها را به صورت بردار لغزان در نظر گرفت.

P: نیروی لغزان (بردار لغزان) نیرو خارجی

دیاگرام آزاد نیروها

وقتی می خواهیم دیاگرام آزاد یک جسم را بکشیم فقط خود جسم را می کشیم و جسم های اطراف آن را نمی کشیم.



مفصل محدود دارای دو مولفه نیروی تکیه گاهی

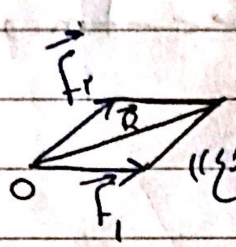
« F_B و F_A نیرو های اصطکاک ایستایی »

تعادل استاتیکی

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P = F_1 + F_2$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_A + N_B = W$$

(I)

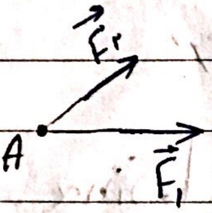


«در متوازی اضلاع»

$\vec{R}$ بردار نیروی برآیند حاصل از $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ «در روش متوازی الاضلاع»

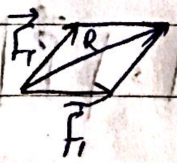
$\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ و R همگی از O می گذرند.

(II)



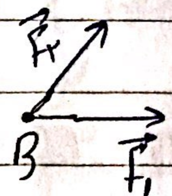
«در متوازی اضلاع»

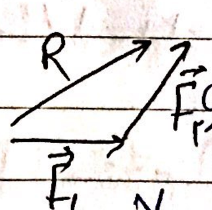
$\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ را طبق اصل انتقال پذیری نیروها جابه جا می کنیم تا در A متقاطع شوند



$\vec{R}$ و $\vec{F_2}$ و $\vec{F_1}$ باز هم همگی از A (نقطه تقاطع) می گذرند

(III)



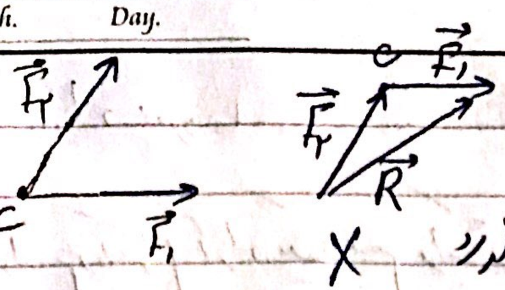


این حالت جمع مثال نیروهای $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ اصل انتقال پذیری $\vec{F_2}$ را نقض می کند چون خط اثر F_2 جابه جا شده است ✗

و توی خط اثر نیروی خودش جابه جا نشده است

Scanned with CamScanner

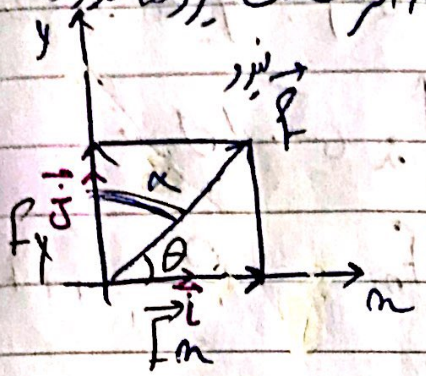
IV



گرچه $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ امتدادشان از c می‌گذرد

ولی بردار برآیند $\vec{R}$ امتدادش از c نمی‌گذرد

* در روش جمع برداری نیروها حتماً باید بردار برآیند از نقطه اثر تک تک نیروها بگذرد.



مجاور Cos

مقابل Sin

f_x و f_y ← مولفه‌های بردار $\vec{F}$

$$F = \vec{F_x} + \vec{F_y}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = |\vec{F_x}| \cdot i + |\vec{F_y}| \cdot j$$

برحسب θ

$$|\vec{F_x}| = |\vec{F}| \cdot \cos\theta$$

$$|\vec{F_y}| = |\vec{F}| \cdot \sin\theta$$

برحسب α

$$|\vec{F_x}| = |\vec{F}| \cdot \sin\alpha$$

$$|\vec{F_y}| = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha$$

فصل ۲:

۱ـ۴ـ۱۰ـ۱۳ـ۱۷ـ۲۱ـ۲۳ـ۲۴ـ۲۶ـ۲۷ـ۳۶ـ۳۸ـ۴۰ـ۴۶ـ۴۷

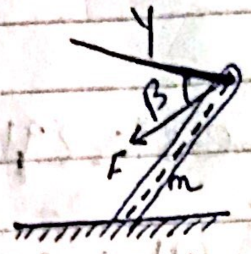
۵۱ـ۶۰ـ۶۸ـ۶۹ـ۷۰ـ۷۲ـ۷۵ـ۸۱ـ۸۷ـ۸۸ـ۸۹ـ۹۴ـ۹۹ـ۱۰۲ـ۱۰۶

۱۱۰ـ۱۱۱ـ۱۱۴ـ۱۱۷ـ۱۲۵ـ۱۲۷ـ۱۲۸ـ۱۳۴ـ۱۳۸ـ۱۴۱ـ۱۷۸ـ۱۷۹ـ۱۸۶

Scanned with CamScanner

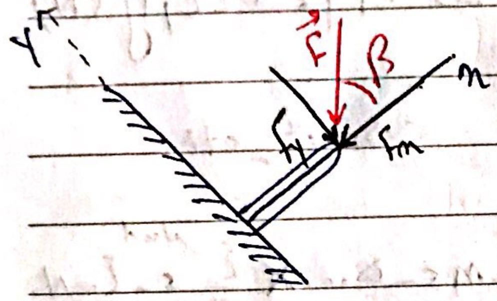
Year. Month. Day. Subject.

چند مثال از وضعیت های مختلف تجزیه بردار در ۲ بعد. (خط نقطه‌ها جهت اختیاری و لا است)



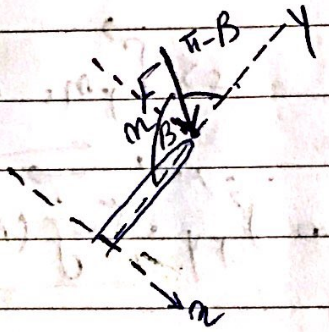
$F_x = +F \sin\beta$

$F_y = +F \cos\beta$



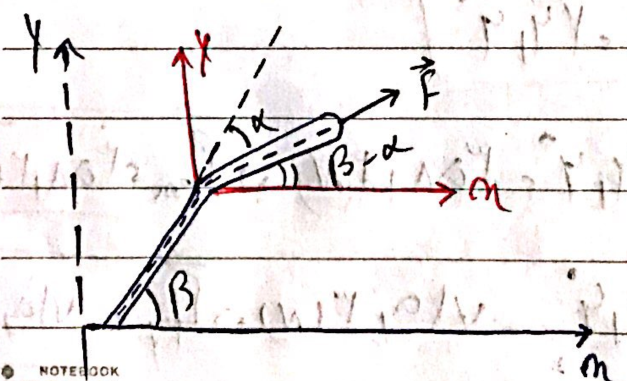
$F_x = -F \cos\beta$

$F_y = -F \sin\beta$



$F_x = +F \sin(\pi-\beta)$

$F_y = -F \cos(\pi-\beta)$



$F_x = +F \cos(\beta-\alpha)$

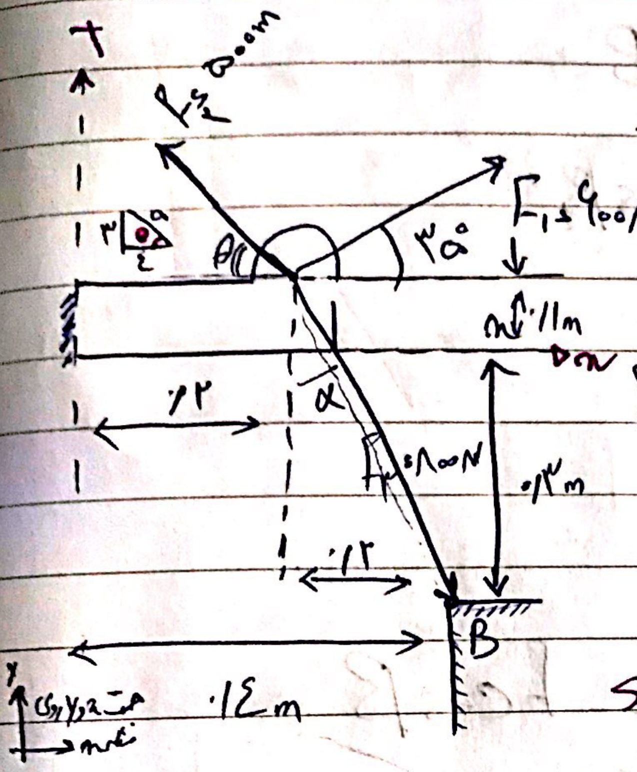
$F_y = +F \sin(\beta-\alpha)$

NOTEBOOK iman

Scanned with CamScanner

مثال: از شکل مقابل جهت نیروهای F_1 و F_2 و F_3 را که بر نقطه‌ی A وارد شده‌اند مشخص است

مولفه‌های اسکالر x و y را برای هر یک از این سه نیرو مشخص کنید



$F_{1x} = +F\cos 35 = 600\cos 35 = 491.5 (N)$

$\Rightarrow \vec{F}_{1x} = 491.5\vec{i} (N)$

$F_{1y} = +F_1 \sin 35 = 600\sin 35 = 344.1 (N)$

$\Rightarrow \vec{F}_{1y} = 344.1\vec{j} (N)$

$\sin\theta = \frac{3}{5} = 0.6 \qquad \cos\theta = \frac{4}{5} = 0.8$

ب) $\sin\theta = \frac{3}{5} \qquad F_{2x} = -F_2\cos\theta \Rightarrow F_{2x} = -500 \times \frac{4}{5} = -400N$ اسکالر

$\cos\theta = \frac{4}{5} \qquad \Rightarrow \vec{F}_{2x} = -400\vec{i} (N)$

اسکالر

$F_{2y} = +F_2\sin\theta \Rightarrow F_{2y} = +500 \times \frac{3}{5} = 300N \Rightarrow \vec{F}_{2y} = 300\vec{j} (N)$

ج) $|F_3| \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{0.2}{0.4}\right) \Rightarrow \alpha = 26.6°$

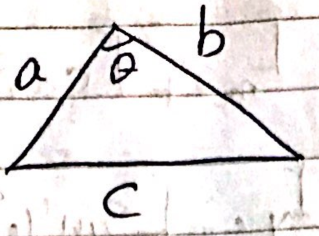
$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}\right) \qquad F_{3x} = +800 \times \sin 26.6° = 358.2 (N) \Rightarrow \vec{F}_{3x} = 358.2\vec{i} (N)$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{BC}{AC}\right) \qquad F_{3y} = -800 \times \cos 26.6° = -715.3 (N) \Rightarrow \vec{F}_{3y} = -715.3\vec{j} (N)$

NOTEBOOK iman

Scanned with CamScanner

قضیه Cos ها:



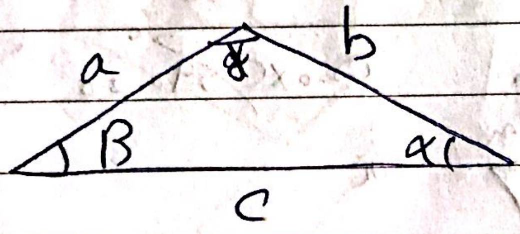
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

$\theta < 90^\circ \longrightarrow \cos\theta > 0 \longrightarrow c^2 < a^2 + b^2$

$\theta = 90^\circ \longrightarrow \cos\theta = 0 \longrightarrow c^2 = a^2 + b^2$ حالت خاص قضیه فیثاغورث.

$\theta > 90^\circ \longrightarrow \cos\theta < 0 \longrightarrow c^2 > a^2 + b^2$

قضیه Sin ها:



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

مثال: نیروی 500N بر تیر قائمی وارد می‌شود

الف) بردار F را برحسب بردارهای یکه‌ی i و j بنویسید.

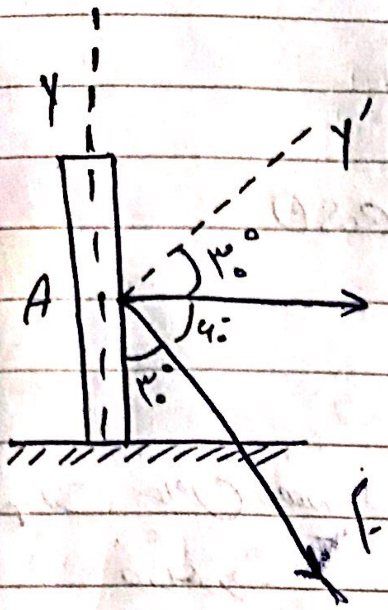
ب) مولفه‌های اسکالر F را در امتداد محورهای x و y بنویسید

ج) مولفه‌های اسکالر F را در امتداد محورهای x و y بنویسید

NOTEBOOK iman

Scanned with CamScanner

$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$



الف) $F_x = +F\cos 60^\circ = +500 \times \frac{1}{2} = 250(N)$

$\Rightarrow \vec{F}_x = 250(N)\, i$

$F_y = -F\sin 60^\circ = -500 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 433.01 N$

$\Rightarrow \vec{F}_y = -433.10 (N)\, j$

مولفه‌های اسکالر $\Leftarrow F_x = 250(N) \quad F_y = -433.01(N)$

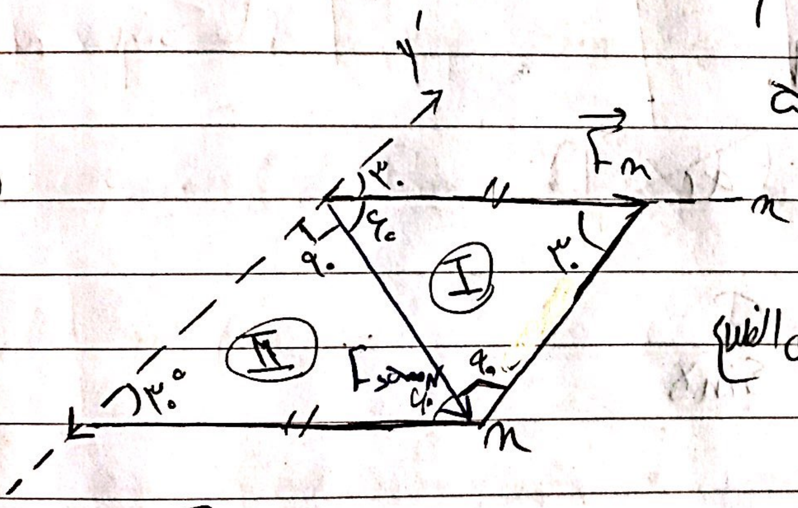
$F = 500 N \quad \vec{F} = +250(N)\, i - 433.01 N\, j$

ب) $\vec{F}_{x'} = 500(N)\, i' \Rightarrow F_{x'} = 500 N$ (برداری / اسکالر)

$\vec{F}_{y'} = 0(N)\, j' \Rightarrow F_{y'} = 0 N$

$500 \times \cos 90^\circ = 0$

ج)



متوازی الاضلاع $\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_{y'}$

مثلث I: $\frac{F_x}{\sin 90} = \frac{500 N}{\sin 30} \Rightarrow F_x = +1000 N$ ($\sin 90 = 1$, $\sin 30 = \frac{1}{2}$)

مثلث II: $\frac{F_{y'}}{\sin 60} = \frac{500}{\sin 30} \Rightarrow F_{y'} = -866 N$

در جهت ⊖ محور y'

NOTEBOOK iman

Scanned with CamScanner

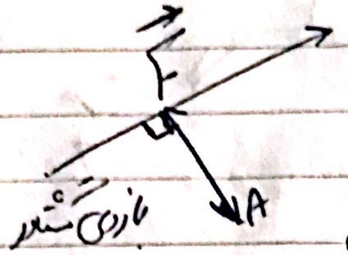
Year. ۷ / Month. Day. Subject.

گشتاور (ممان) :

گشتاور = نیرو × فاصله ی عمودی ← (بازوی گشتاور)

$$M = F \cdot d$$

(N.m) = (N).(m)



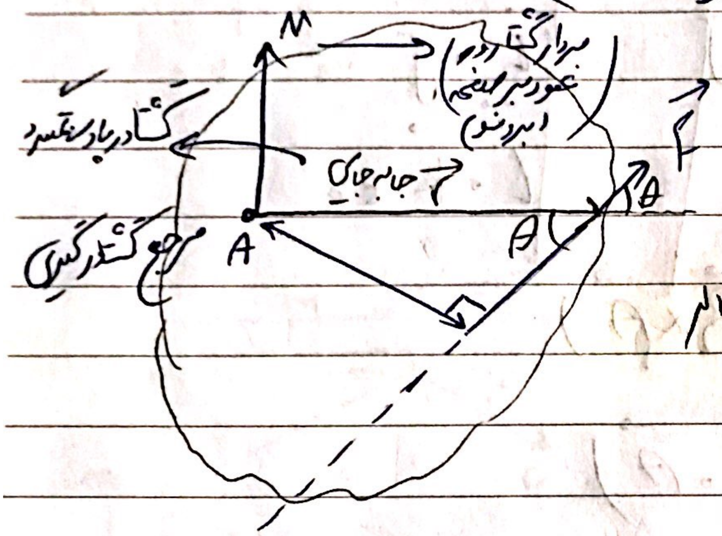
$M_A = F \cdot d$

نسبت به نقطه ی A

(مقدار اسکالر گشتاور)

روش اسکالر $M_A = F \cdot d$

روش برداری $\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}$

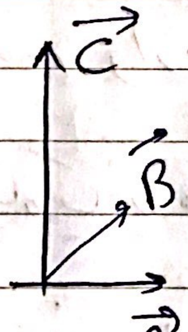


$M_A = r \cdot F \cdot \sin\theta$

$F \cdot d = r \cdot F \cdot \sin\theta$

$d = r\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{d}{r}$

از شکل فوق داریم $\sin\theta = \frac{d}{r}$ ← ok

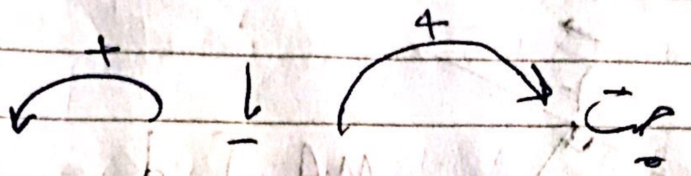


$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

Scanned with CamScanner

Clockwise ← CW گشتاور ساعتگرد

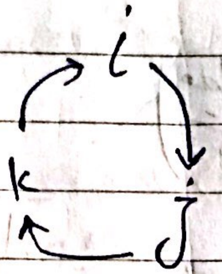
Counter clockwise ← CCW گشتاور پاد ساعتگرد



$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$



$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

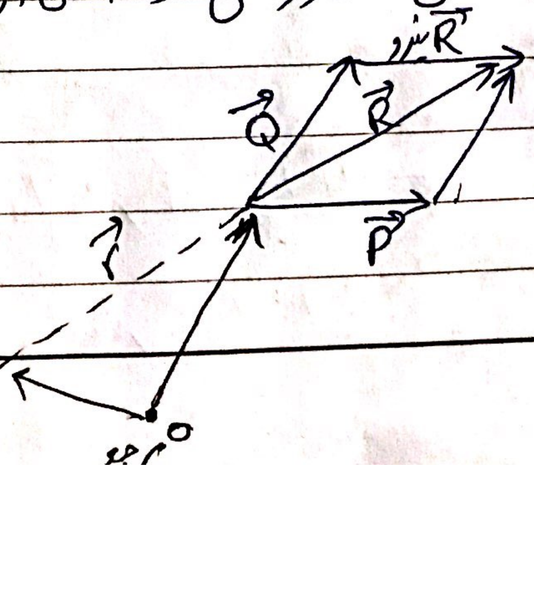
$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$

ضرب خارجی $(\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A})$

ضرب داخلی $(\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A})$

قضیه وارینیون

گشتاور یک نیرو حول یک نقطه با مجموع مولفه‌های گشتاورهای مولفه‌های آن نیرو حول همان نیرو برابر است.



Year. / Month. Day. Subject.

$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

نیرو و جابجایی

$\vec{P}$ و $\vec{Q}$ مولفه‌های بردار $\vec{R}$

$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

جمع متوازی‌الاضلاع

$\vec{M}_O = \vec{r} \times (\vec{P} + \vec{Q})$

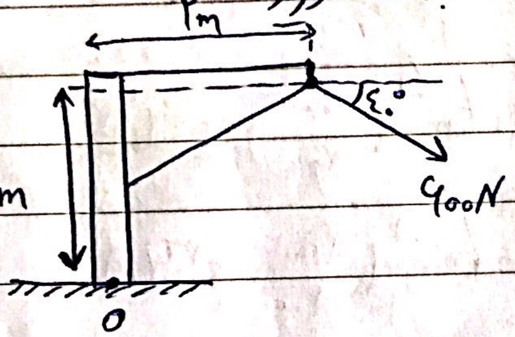
$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{P} + \vec{r} + \vec{Q}$

$\vec{r}$ بردار جابجایی

ابتدای $\vec{r}$: نقطه‌ی مرجع O

انتهای $\vec{r}$: نقطه‌ی دلخواهی از خط اثر نیروی $\vec{R}$

مثال: مقدار گشتاور نیروی 600N را حول نقطه‌ی O بدست آورید.



روش اول: $\overset{+}{\curvearrowright} M_O = +600\cos 40 \times 4 + 600\cos 40 \times 2$

$= +2610 \ (N.m)$

ساعتگرد (CW)

روش دوم: $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ $\quad \vec{r} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$

$\vec{F} = 600\cos 40\, \vec{i} - 600 \sin 40\, \vec{j} = 459.63\, \vec{i} - 385.68\, \vec{j}$

$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = (2\vec{i} + 4\vec{j}) \times (459.63\, \vec{i} - 385.67\, \vec{j}) =$

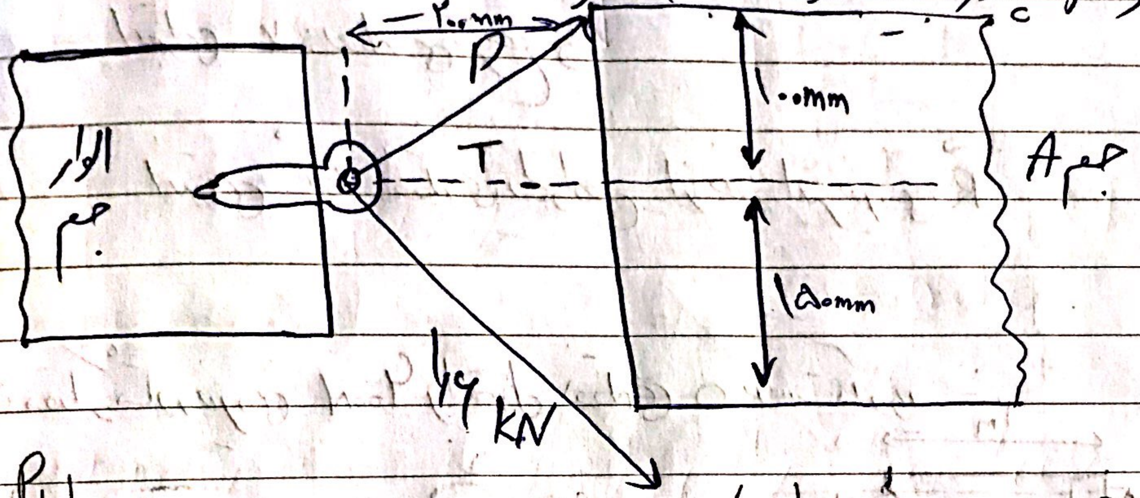
$\vec{M}_O = 0 - 771.34\, \vec{k} - 1838.52\, \vec{k} \simeq 2610\, \vec{k} \ N.m$

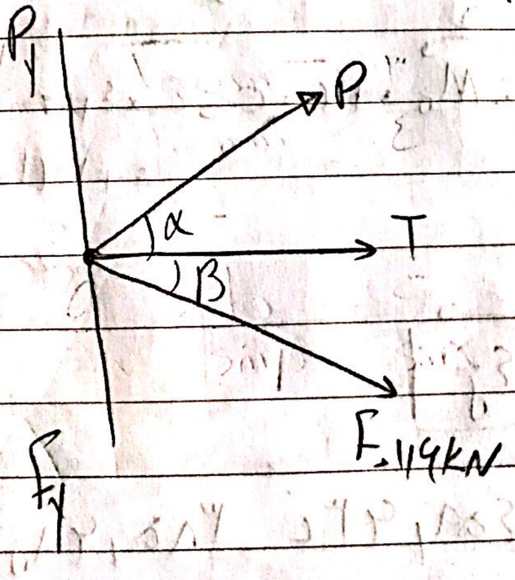
باتوجه به علامت $\vec{k}$ ← بردار گشتاور ← درون‌سو ← گشتاور کلی ساعتگرد

Scanned with CamScanner

مثال امتحانی: می‌خواهیم با وارد کردن نیرویی در امتداد محور میخ آن را از الوار یا چوب شکل مقابل بیرون بکشید جسم A مانع دسترسی مستقیم به میخ می‌باشد مطابق شکل با استفاده از طناب ۲ نیرو به سر میخ وارد می‌کنیم یکی نیروی ۱,۶ کیلونیوتنی و دیگری P برای اینکه برایند این دو نیرو (T) در امتداد محور میخ بر آن وارد شود

مقدار P چقدر باید باشد ب) T را حساب کنید.





$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{100}{200}\right) = 26,5°$

$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{150}{200}\right) = 36,9°$

$P_y = F_y \Rightarrow P\sin\alpha = 1,6 \sin\beta \Rightarrow P = 2,13\,kN$

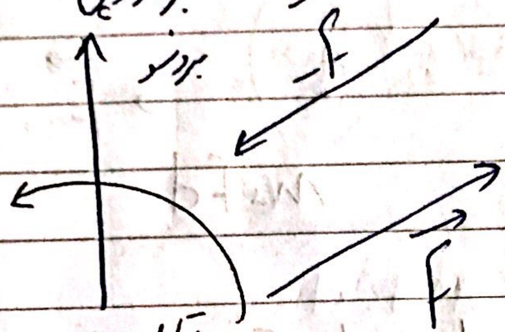
NOTEBOOK iman

Scanned with CamScanner

کوپل Couple (زوج نیرو):

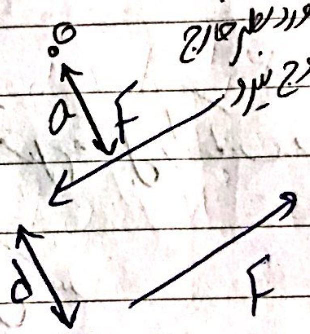
گشتاوری که ۲ نیروی مساوی مخالف الجهت و غیر هم راستا وارد می کنند را کوپل گویند
اثر آن ها ایجاد تمایل به دوران در جسم می باشد.

* مقدار کوپل به اندازه ی a (فاصله ی نیروها تا مرکز گشتاورگیری) بستگی ندارد و مقدار گشتاور کوپل نسبت به تمام نقاط یکسان است. اصطلاحاً کوپل را بردار آزاد گویند



۱- نیروی با هم برابر (اسکالر)
۲- در خلاف جهت یکدیگر
۳- موازی

فرض ۱ نقطه مورد نظر خارج فاصله زوج نیرو

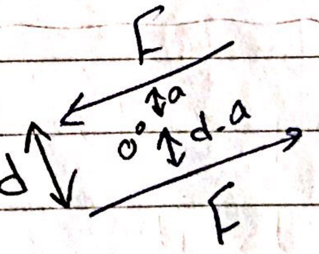


زوج نیرو:
۱- نیروها مساوی
۲- غیر همراستا
۳- در خلاف جهت

مقدار کوپل؟ گشتاور نسبت به o

$$\overset{+}{M_o} = F(a+d) - Fa$$
$$= Fa + Fd - Fa$$
$$M = Fd$$

فرض ۲ نقطه ی مورد نظر (o) بین فاصله زوج نیرو

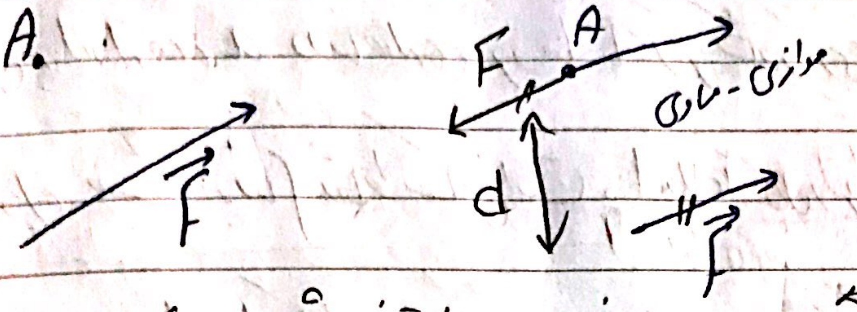


$$\overset{+}{M_o} = F(d-a) + Fa$$
$$= Fd - Fa + Fa$$
$$M_o = F.d$$

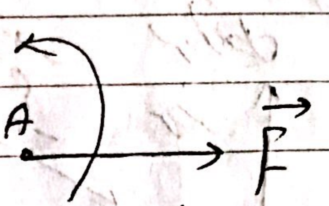
iman notebook
Scanned with CamScanner

دستگاه نیرو - کوپل ۵ در برخی از موارد در مهندسی مناسب باید اثر نیروی

دستگاه نیرو - کوپل : در برخی از موارد دیگر نیرو را با نیروی موازی - مساوی و یک کوپل برای جبران تغییر گشتاور آن جایگزین کنیم نمایش اثرات ۲ گانه‌ی نیرو آسانتر می‌شود

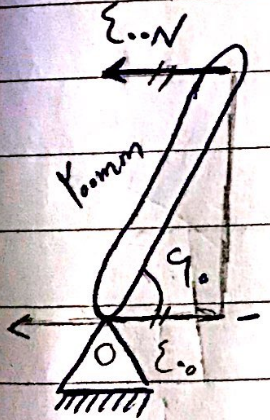


نیروهای علامت زده شده (۱۱) با یکدیگر کوپل می‌سازند



$M = Fd$

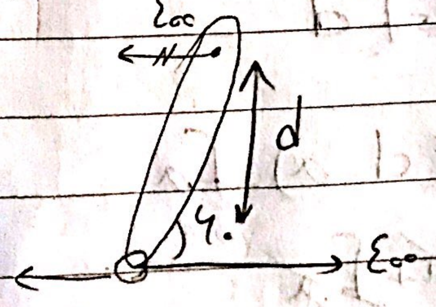
مثال ۵: نیروی افقی وارد بر اهرم شکل مقابل را با یک دستگاه نیرو کوپل (متشکل از یک نیرو در O و یک کوپل) جایگزین کنید



$\sin 60 = \frac{d}{0.2}$, $0.2 \times \sin 60 = 0.173\,m$

$M = F.d = 400 \times 0.173 = 69.28\ Nm$

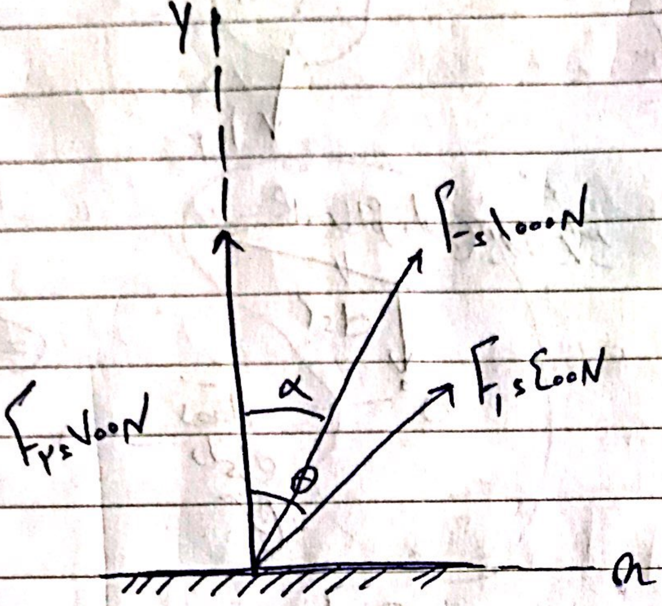
کوپل پادساعتگرد (CCW)

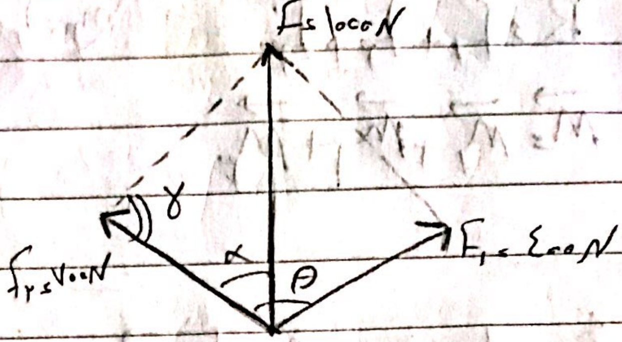


Year. Month. ۶ Day. Subject.

مثال: در شکل زیر نیروی $F_1 = 400N$ تحت چه زاویه‌ای از θ نسبت به محور قائم وارد شود تا مقدار برآیند ۲ نیرو $F = 1000N$ شود

ب) زاویه‌ی نیروی برآیند با امتداد قائم چقدر است؟





الف) $(1000)^2 = (400)^2 + (700)^2 - 2 \times 400 \times 700 \cos\gamma \Rightarrow \gamma = 128.7$

$\theta = 180^\circ - \gamma = 51.3^\circ$

نکته: در متوازی‌الاضلاع مجموع ۲ زاویه‌ی مجاور ۱۸۰ است

$\gamma + \theta = 180$

ب) $(400)^2 = (1000)^2 + (700)^2 - 2 \times 1000 \times 700 \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 18.2$

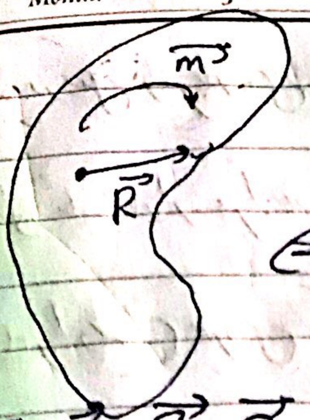
راه دوم: $\frac{400}{\sin\alpha} = \frac{1000}{\sin\gamma}$ ، $\sin\gamma = \sin 128.7 \Rightarrow \alpha = 18.2$

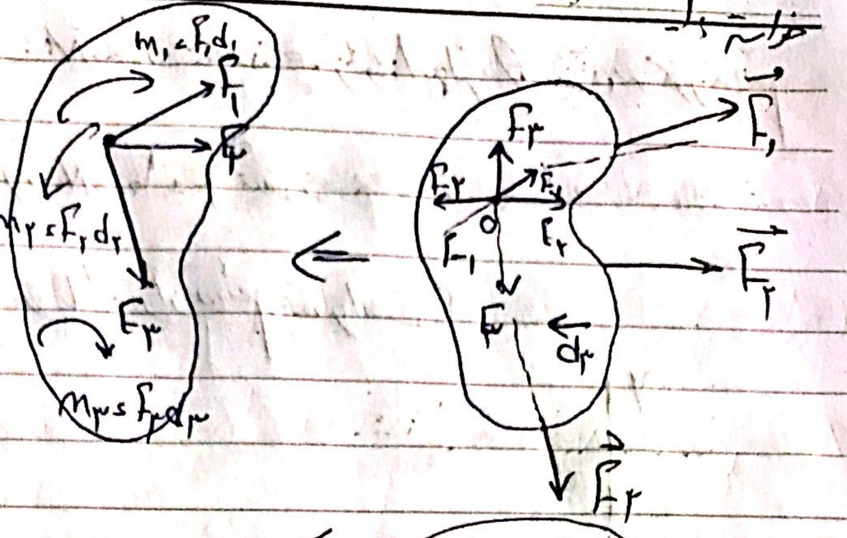
NOTEBOOK iman

Scanned with CamScanner

نیروی واقعی برآیند در فاصله do بموازات خط اثر گذرنده از نقطه دلخواه o و با اثر آن می باشد.

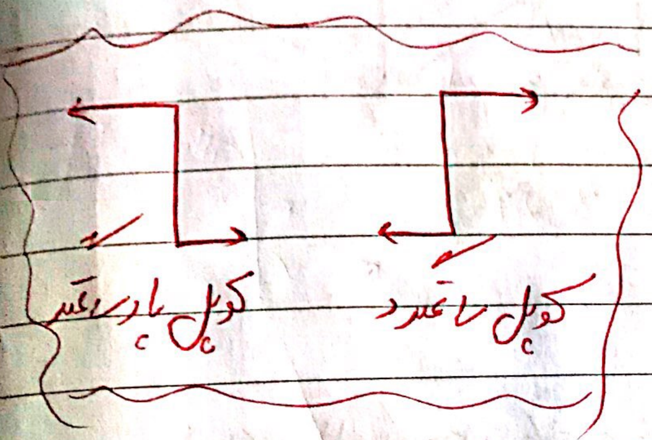
Year. Month. Day. Subject.

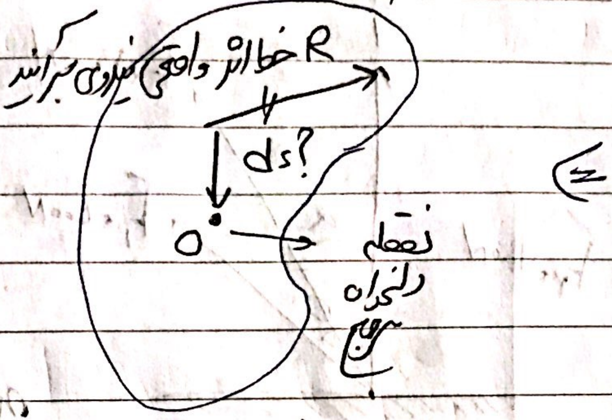




$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$

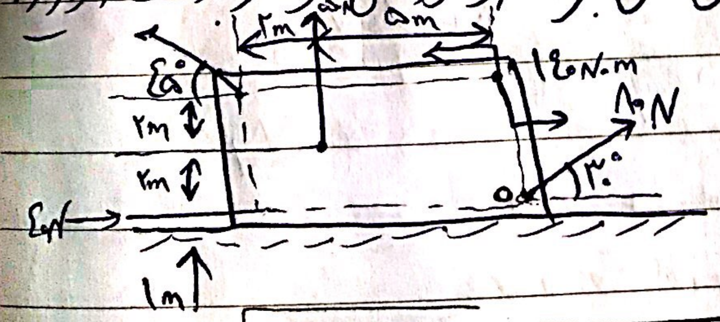




$M = R \cdot d$

$d = \frac{M}{R}$ مقدار اسکالر

مثال ۵: برآیند ۴ نیروی یک کوپل را که مطابق شکل بر صفحه وارد می شود را بدست آورید.



$R_x = 80\cos 30° + 40 - 60\cos 45° = 66.9N$

$R_y = 80\sin 30° + 50 + 60\sin 45° = 132.48N$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{66.9^2 + 132.48^2} = 148.3N$

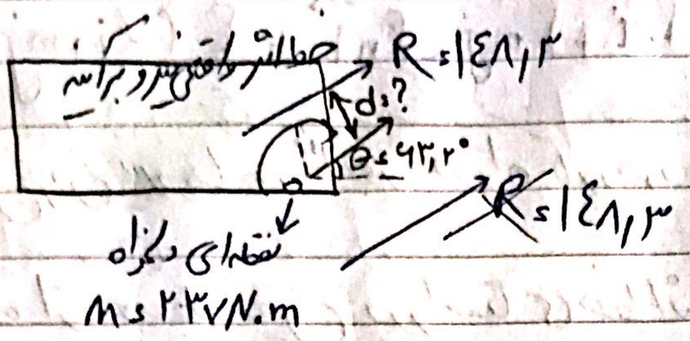
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{132.48}{66.9} = 63.2°$

iman NOTEBOOK

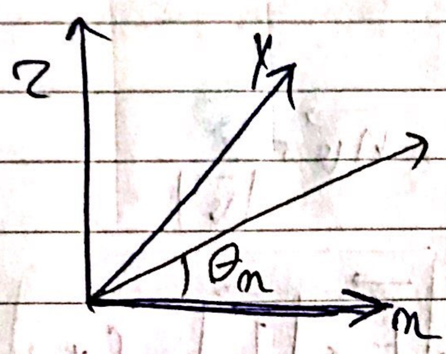
Scanned with CamScanner

$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_o = -140 + 50 \times 5 + 60 \sin 45 \times 7 - 60 \cos 45 \times 4 = 237\ (N.m)$ پادساعتگرد

$M_o = R.d \rightarrow d = \frac{M_o}{R} = \frac{237}{148.3} = 1.6\ m$



نیروها در ۳ بعد (نیروهای ۳ بعدی):



$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$

$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$

θ_x = زاویه $\vec{F}$ با جهت مثبت محور xها

θ_y = زاویه $\vec{F}$ با جهت مثبت محور yها

θ_z = زاویه $\vec{F}$ با جهت مثبت محور z

$F_x = F \cos\theta_x$

$F_y = F \cos\theta_y$

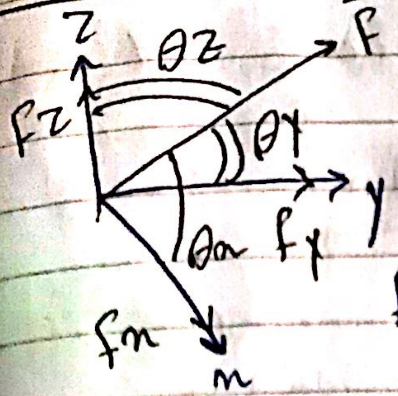
$F_z = F \cos\theta_z$

~~$\vec{F} = F \cos\theta_x +$~~

$\vec{F} = F \cos\theta_x \vec{i} + F \cos\theta_y \vec{j} + F \cos\theta_z \vec{k}$

$\vec{F} = F(\cos\theta_x \vec{i} + \cos\theta_y \vec{j} + \cos\theta_z \vec{k})$

$\vec{F} = F(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k})$



$F_x = F \cdot \cos\theta_x \quad F_y = F \cdot \cos\theta_y \quad F_z = F \cdot \cos\theta_z$

کسینوس های هادی $\cos\theta_x = l \quad \cos\theta_y = m \quad \cos\theta_z = n$

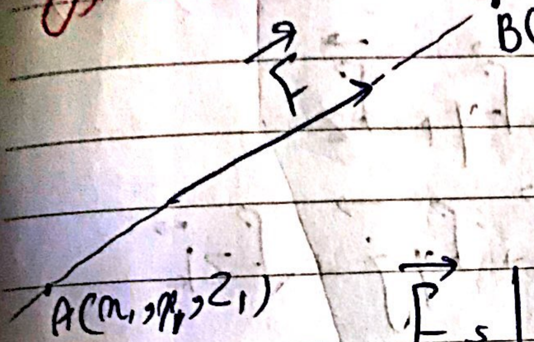
$\vec{F} = Fl\vec{i} + Fm\vec{j} + Fn\vec{k} = F(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k})$

★ مشخص کردن نیروها در ۳ بعد دو راه کار وجود دارد:

۱ـ استفاده از دو نقطه معین در راستای خط اثر نیرو

۲ـ استفاده از دو زاویه تعیین کننده راستای خط اثر نیرو

حالت اول:



$\vec{V} = |\vec{V}| \cdot \vec{n}_V \rightarrow \vec{n}_V = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$

$\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \vec{n}_{AB} \longrightarrow \boxed{\vec{F} = |\vec{F}| \cdot (*)}$

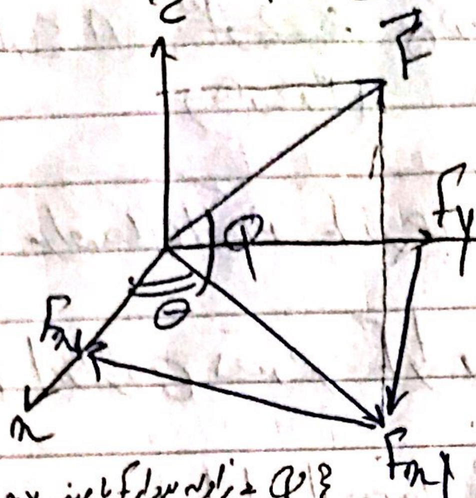
$(*)\ \vec{n}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\ *$

$\sqrt{(x_2 - x_1)\vec{i}^{\,2}} \qquad (\vec{i})^2 = |x|x$

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$

حالت دوم:

استفاده از دو زاویه تعیین کننده راستای خط اثر نیرو (θ , φ)



$F_{xy} = F\cos\varphi$ مقدار اسکالر

$F_x = F_{xy}\cos\theta = F\cos\varphi\cos\theta$

$F_y = F_{xy}\sin\theta = F\cos\varphi\sin\theta$

$F_z = F\sin\varphi$

φ: زاویه بردار F با صفحه xy

θ: زاویه تصویر F روی صفحه xy با محور x

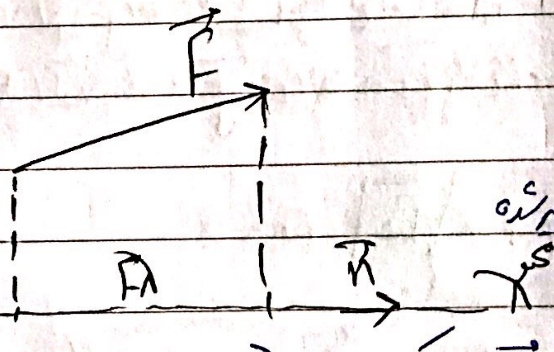
F: اندازه مشخص مساله ↓ اندازه بردار $\vec F$

F_{xy}: تصویر F روی صفحه x-y

$\vec F_{کل} = F_x\vec i + F_y\vec j + F_z\vec k$

نکته: اگر محور دلخواهی مانند λ با بردار یکه $\vec n$ وجود داشته باشد و همچنین نیرویی با بردار $\vec F$ وجود داشته باشد، آنگاه تصویر $\vec F$ بر روی محور λ

تصویر $\vec F$ در جهت λ ؟



$F_n = \vec F \cdot \vec n$ اندازه بردار تصویر شده

$\vec F_n = F_n \vec n$ بردار تصویر شده

$= (\vec F \cdot \vec n)\,\vec n$

$\vec n$: بردار یکه جهت محور λ

F_n: اندازه بردار تصویر $\vec F$ بر روی $\vec\lambda$

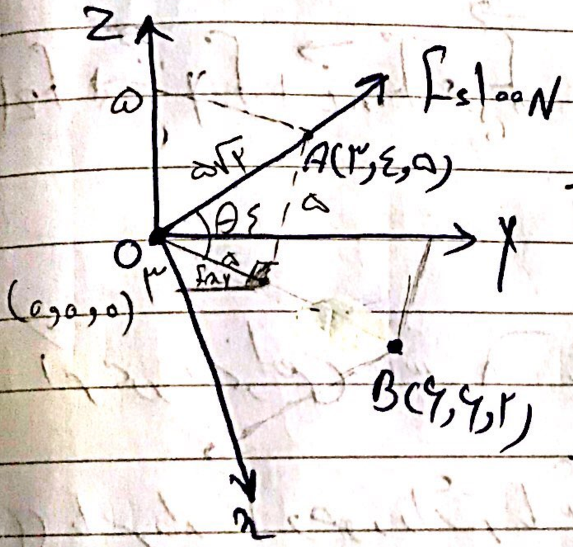
$\vec F_n$: بردار تصویر $\vec F$ بر روی $\vec\lambda$

مثال: نیروی $F = 100N$ مطابق شکل به مبدأ مختصات وارد می‌شود خط اثر F از نقطه‌ی A (۳،۴،۵) می‌گذرد. $B(6,6,2)$

الف) مولفه‌های اسکالر F در جهات (x و y و z) را بدست آورید

ب) اندازه‌ی تصویر F را روی صفحه‌ی (x و y) بدست آورید

ج) تصویر F از امتداد خط OB را بدست آورید



$$\vec F = |\vec F| \cdot n_{OA}$$

$$\vec n_{OA} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} = \frac{3\vec i + 4\vec j + 5\vec k}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}$$

$$= 0.4244\vec i + 0.566\vec j + 0.707\vec k$$

$$\vec F = 100(0.4244\vec i + 0.566\vec j + 0.707\vec k)$$

$$= 42.4\vec i + 56.6\vec j + 70.7\vec k \ (N)$$

مولفه‌های اسکالر $\vec F$:

$F_x = 42.4N$

$F_y = 56.6N$

$F_z = 70.7N$

ب) $|\vec F_{xy}| = |\vec F| \cdot \cos\theta$

$$\Rightarrow |\vec F_{xy}| = 100 \times 0.707 = 70.7N$$

$$\cos\theta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$$

ج) اندازه اسکالر $F_{OB} = \vec{F}\cdot\vec{n}_{OB}$

بردار $\vec{F}_{OB} = F_{OB}\cdot\vec{n}_{OB}$

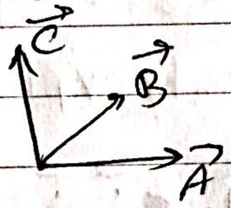
$$\vec{n}_{OB} = \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|} = \frac{6\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{6^2+6^2+2^2}} = 0.688\vec{i} + 0.688\vec{j} + 0.229\vec{k}$$

$$F_{OB} = (42.4i + 56.6j + 70.70k)\cdot(0.688\vec{i} + 0.688\vec{j} + 0.229\vec{k}) =$$

$$28.83 + 38.48 + 15.55 = \boxed{84.14\ (N)}$$

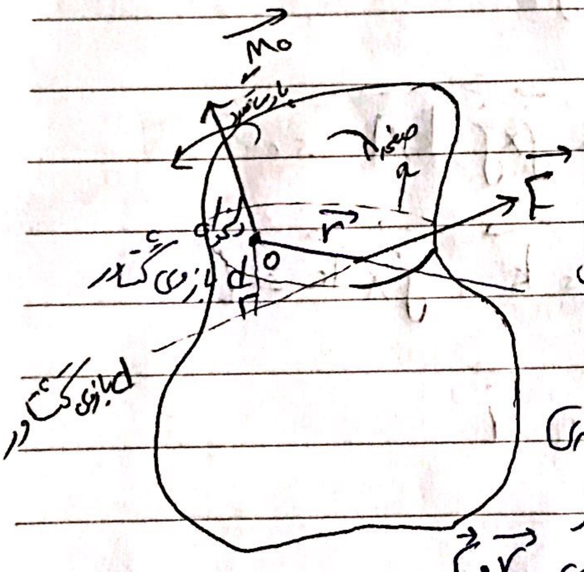
بردار $\vec{F}_{OB} = F_{OB}\cdot\vec{n}_{OB}$ بردار $\vec{F}_{OB} = 84.14\cdot(0.688\vec{i} + 0.688\vec{j} + 0.229\vec{k})$

$$\vec{F}_{OB} = 58.1\,\vec{i} + 58.1\,\vec{j} + 19.35\vec{k}\ (N)$$



$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$

گشتاور و ضرب برداری در ۳ بعد



اسکالر $M_O = F\cdot d$

جهت گشتاور با استفاده از قانون دست راست

عمود بر صفحه گذرنده از ← $\vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F}$

بردارهای $\vec{F}$ و $\vec{r}$ $M_O = rF\sin\alpha$ $\vec{r}\times\vec{F} \neq \vec{F}\times\vec{r}$

$$\vec{r}\times\vec{F} = -\vec{F}\times\vec{r}$$

$\vec{r}$: برداری که ابتدایش مرجع گشتاورگیری (O) و انتهایش نقطه دلخواهی از خط اثر نیروی وارد است

★ گشتاور و کوپل در ۳ بعدی

خواسته مساله:

محاسبه گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول نقطه دلخواه O؟ $\vec{M}_O$?

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$M_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = +(r_yF_z - r_zF_y)\vec{i} - (r_xF_z - r_zF_x)\vec{j} + (r_xF_y - r_yF_x)\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

$$\begin{cases} M_x = r_yF_z - r_zF_y \\ M_y = r_zF_x - r_xF_z \\ M_z = r_xF_y - r_yF_x \end{cases}$$

$\vec{i}\times\vec{i} = 0$, $\vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$

حواسم هست:

محاسبه گشتاور نیرو $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ حول محور دلخواه λ

★ تعیین گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول محور دلخواه λ $\vec{M}_\lambda = ?$

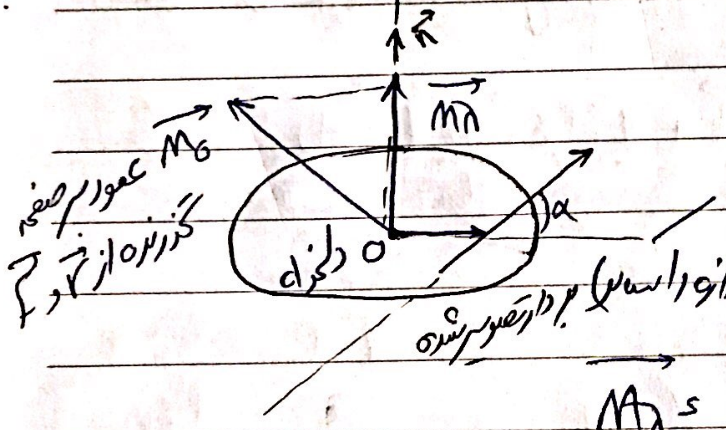
$\vec{n}$ بردار یکه در جهت محور دلخواه λ

گام ۱: انتخاب نقطه‌ی دلخواه O روی محور λ

گام ۲: تعیین گشتاور $\vec{F}$ حول نقطه‌ی O ← $\vec{M}_O$

گام ۳: تعیین اندازه تصویر $\vec{M}_O$ روی محور λ ← M_λ

گام ۴: تعیین بردار تصویر $\vec{M}_O$ روی محور λ ← $\vec{M}_\lambda$



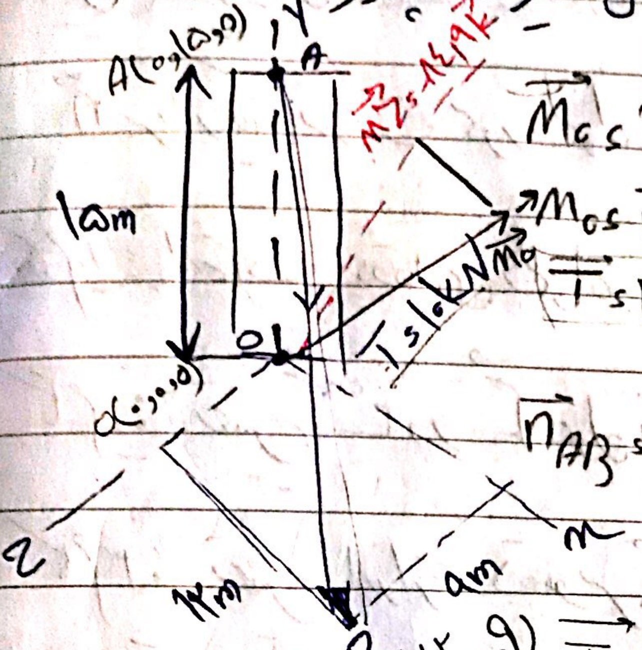
$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

اندازه و اسکالر بردار تصویر شده: $M_\lambda = \vec{M}_O \cdot \vec{n} = \vec{r} \times \vec{F} \cdot \vec{n}$

$\vec{M}_\lambda = M_\lambda \cdot \vec{n} = (\vec{r} \times \vec{F} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$

Scanned with CamScanner

مثال ۶: کابلی مطابق شکل از نقطه‌ی A در بالای تیرک به نقطه‌ی B روی زمین وصل شده است. مقدار کشش در این کابل برابر $T = 10\,kN$ است. گشتاور نیروی T حول محور z گذرنده از نقطه‌ی O در پای تیرک چقدر است؟



$\vec{M}_O = ?\quad \vec{r} = 15\vec{j}$

$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{T}$

$\vec{T} = 10\,\vec{n}_{AB}$

$\vec{n}_{AB} = \dfrac{12\vec{i} - 15\vec{j} + 9\vec{k}}{\sqrt{12^2 + 15^2 + 9^2}}$

خواسته مسئله؟ $\vec{M}_z = ?$

گام ۱: انتخاب $\vec{M}_O$ روی محور

گام ۲: تعیین $\vec{M}_O$

گام ۳: تعیین اندازه M_z

گام ۴: $\vec{M}_z = ?$

$B(12,0,9) \Rightarrow \vec{T} = 10(0.566\vec{i} - 0.707\vec{j} + 0.424\vec{k})\,kN$

$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{T} = 15\vec{j} \times 10(0.566\vec{i} - 0.707\vec{j} + 0.424\vec{k})$

$\vec{M}_O = 150(-0.566\vec{k} + 0.424\vec{i})\,(kN.m)$

$M_z = \vec{M}_O \cdot \vec{n}_{AB}$

$\vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

$\vec{i}\cdot\vec{k} = 0$

$M_z = 150(-0.566\vec{k} + 0.424\vec{i})\cdot k$

$M_z = -84.9$

$\vec{M}_z = M_z \cdot n = -84.9\,\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{M}_z = -84.9\vec{k}\ kN.m}$

Subject ۱۵/ ۱-۲-۴-۶-۱۱-۱۲-۱۳-۱۵-۱۷-۱۸-۱۹-۲۰
Date ۲۱-۲۴-۲۵-۲۹-۳۰-۳۷-۴۰-۴۲-۴۴-۴۵-۴۶-۴۹
۵۲-۵۴-۵۵-۵۵-۵۷-۹۹-۱۰۲

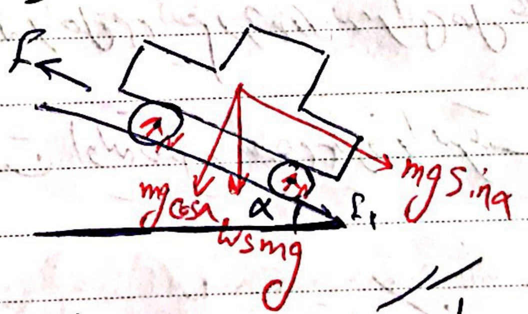
فصل سوم: «تعادل»

اگر جسمی در حال تعادل استاتیکی باشد باید معادلات تعادل برقرار باشد.

در حل مسائل تعادل ابتدا جسم یا مجموعه‌ی مورد نظر را از اجسام پیرامونش مجزا یا ایزوله می‌کنیم سپس دیاگرام آزاد جسم رسم می‌شود.

دیاگرام آزاد طرح ساده‌ای از آن جسم است که در آن نیروهایی که اجسام پیرامونیه حذف شده از طریق تماس مکانیکی به جسم مورد نظر وارد می‌کنند نشان داده می‌شود و در انتها برای دیاگرام آزاد معادلات تعادل را می‌نویسیم:

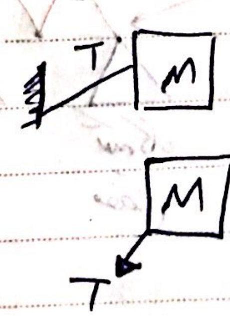
شرط لازم و کافی — معادلات تعادل:
برآیند نیروها $\sum F = 0$
برآیند گشتاورها $\sum M = 0$



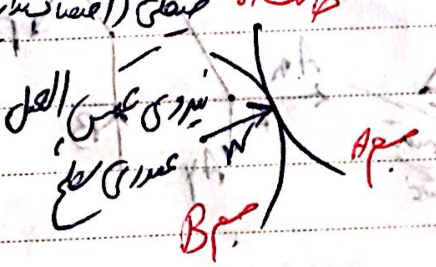
F۲ و F۱ نیروهای اصطکاکی بین چرخ‌ها و سطح شیب دار خلاف جهت حرکت

مدلسازی نیروها در ۲ بعد

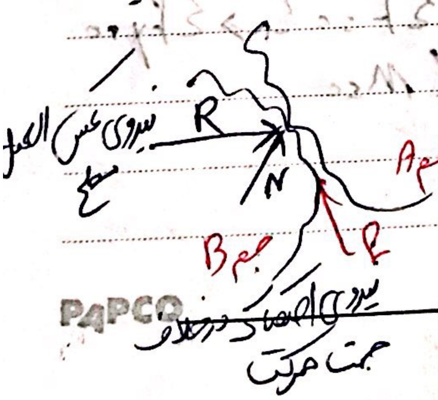
حالت ۱:



حالت ۲: سطوح تماس صاف و صیقلی (اصطکاک نداریم)



حالت ۳: سطح تماس غیر صیقلی (اصطکاک داریم)



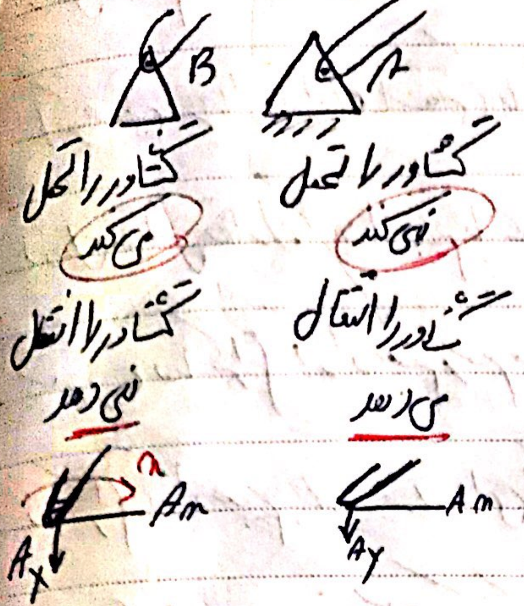
$R = \sqrt{F^2 + N^2}$

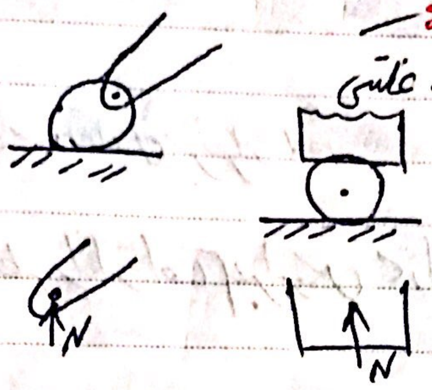
PAPCO

Scanned with CamScanner

حالت ۴:

تکیه‌گاه غلتکی

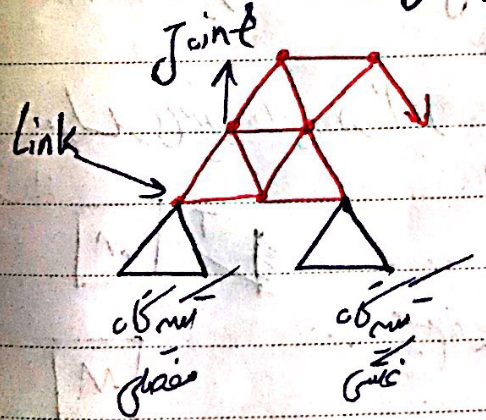


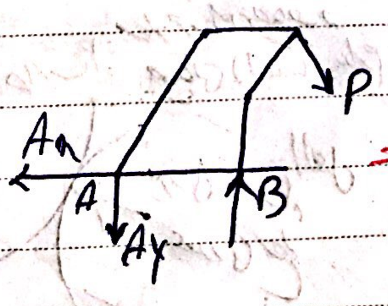


نکته: در حل مسائل تعادل اگر جهت نیرویی را به صورت اولیه نتوانیم تعیین کنیم یک جهت دلخواه برای نیروی فرض می‌کنیم و مسئله را حل می‌کنیم در صورتی که برای حل علامت جبری نیروی مورد نظر منفی به دست آمد جهت اولیه تعیین شده‌ی نیرو را برعکس می‌نماییم.

خرپا

سازه‌ای که نیروی زیادی را نسبت وزن خود سازه تحمل می‌کند





$\Rightarrow \sum F_{sc} \rightarrow \sum F_{xsc}, \sum F_{ysc}$

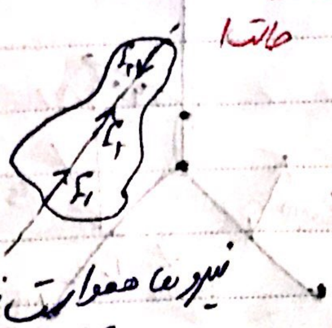
$\sum M_{sc}$

Scanned with CamScanner

Subject
Date

نیروهای متقاطع

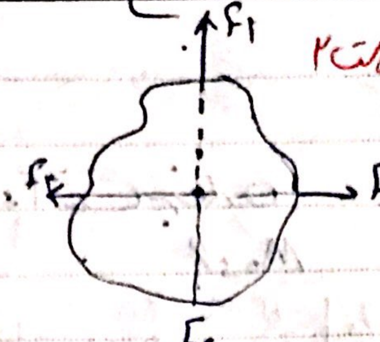
تحلیل نیروها در حالت ۱



نیروها همراستا مثبت

$\sum F_x=0$

حالت ۲



$\sum F_x=0$

$\sum F_y=0$

چون در O متقاطع‌اند به O گشتاور نداریم
بازوی گشتاور صفر است

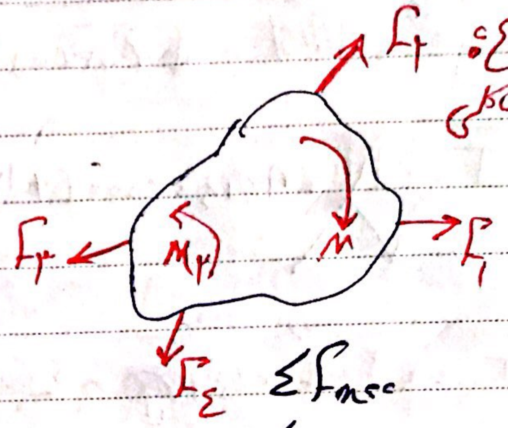
حالت ۳ نیروهای موازی

$\sum F_x=0$

$\sum M_z=0$

دو معادله و ۲ مجهول صحیح

حالت ۴: حالت کلی



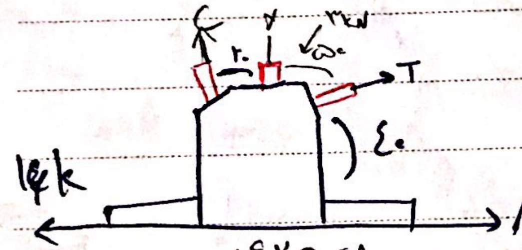
$\sum F_x=0$

$\sum M_z=0$

$\sum F_y=0$

مثال: ۵ نیرو مطابق شکل به مفصل خرپا وارد می‌شود نیروهای C و T را پیدا کنید

نکته: نیروها همگی در مفصل متقاطع هستند
معادله گشتاور نیز نیست



$\sum F_x=0$

$8+T\cos40-16+C\sin20=0$

$0.766T+0.342C=8$

$\sum F_y=0$

$-3+T\sin40-C\cos20=0$

$0.643T-0.940C=3$

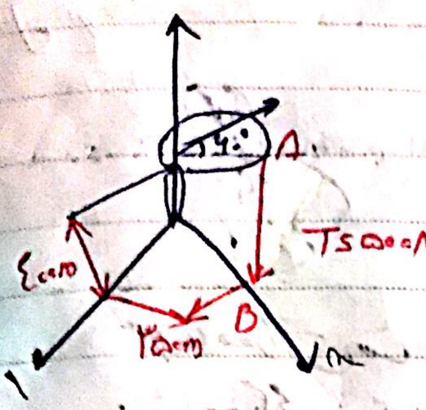
$C=3.03\,kN$

$T=9.09\,kN$

PAPCO

Scanned with CamScanner

مثال ۵ ۱۲۰-۲



محاسبه گشتاور T=500N نسبت به نقطه O:

$M_O = ?$

$A: \begin{vmatrix} -0.125\cos 60 \\ 0.125\sin 60 \\ 0.14 \end{vmatrix} \quad B: \begin{vmatrix} 0 \\ 0.125 \\ 0 \end{vmatrix} \quad O: \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$n_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} = \frac{0.125\cos 60\, i + (0.125 - 0.125\sin 60\, j) - 0.14k}{\sqrt{(0.1705)^2 + (0.046)^2 + (0.14)^2}}$$

$$\overrightarrow{T} = |T| \cdot n_{AB} = 500\,\frac{(0.175i - 0.046j - 0.14j)}{0.229}$$

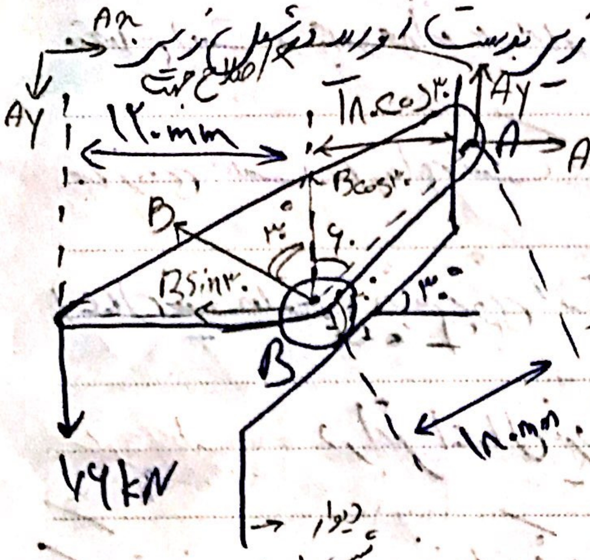
$$\overrightarrow{T} = (\overrightarrow{200i} + \overrightarrow{53.4j} - \overrightarrow{455k})\,N$$

$$\overrightarrow{M_O} = \vec{r} \times \vec{T} \qquad OB = (0i + 0.125j + 0k) = 0.125j$$

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{r_{OB}} \times \vec{T} = 0.125j \times (200i + 53.4j - 455k)$$

$$M_O = 59.4i - 25k$$

مثال: نیروی وارد بر مفصل A و پین B را در شکل زیر بدست آورید (شکل زیر)



$A_x \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow + B \times 0.18 - 1.6(0.12 + 0.18\cos 30) = 0$

$B = 2.45\ kN$ ⇐ نیروی عکس العمل وارد بر تکیه‌گاه غلطکی B

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -B\sin 30 + A_x = 0$

$\Rightarrow -2.45\sin 30 + A_x = 0$

$A_x = 1.225\ kN$

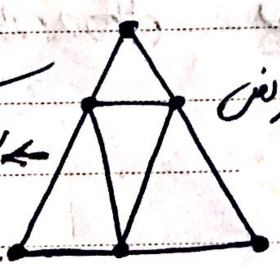
$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B\cos 30 - 1.6 = 0 \Rightarrow A_y = -0.522\ kN$ (B = 2.45)

چون منفی است جهت Ay باید عکس را اصلاح شود

$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(1.225)^2 + (0.522)^2} = 1.331\ kN$

فصل ۴:

«سازه‌ها یا خرپاها»



لینک: نبشی، پروفیل، تیرآهن

مفصل: جوش، پرچ، پیچ

خرپاها: مفصل، مقطع

در تحلیل سازه‌ها به تعیین نیروهای داخلی سازه یعنی به عمل یا عکس العمل بین اعضای آن‌ها پی برده می‌شود. خرپا شبکه‌ای متشکل از چندین عضو است که سرهایشان به هم بسته شده

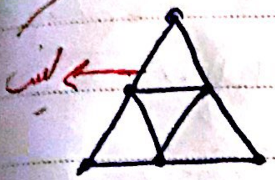
Scanned with CamScanner

متصل است و مجموعه آن یک سازه‌ی صلب را تشکیل می‌دهند.

سازه‌ی صلب سازه‌ای است که فرو نمی‌ریزد و تغییر شکل اعضای سازه در اثر اعمال نیروها قابل چشم‌پوشی است.

سازه‌ی صلب: در اثر اعمال نیرو به سازه، سازه دچار تغییر شکل (گسترش)

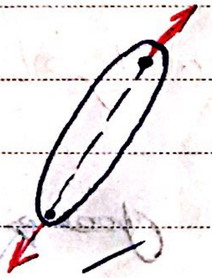
★ کوچکترین جزء همه‌ی خرپاها به شکل مثلث است



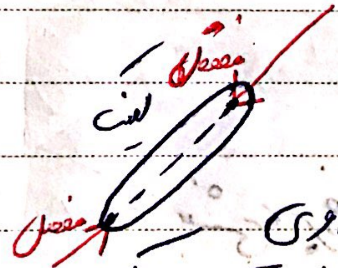
★ فرض کلی در مورد خرپاها:

اجزاء (لینکهای) خرپا را اجزای دو نیرویی فرض می‌کنیم. عضو دو نیرویی، عضوی است که فقط به آن عضو دو نیرو و آن هم در دو سر عضو وارد شده باشد

لینک ← عضو دو نیرویی



(۱) لینک تحت کشش



(۲) لینک تحت فشار

دو نیرو: مساوی، هم‌راستا و در خلاف جهت

طبیعتاً باز هم کل سازه در حال تعادل استاتیکی است

کشش ← T ← Tensile دو جهت نیرو از مفاصل نیرو دور شود

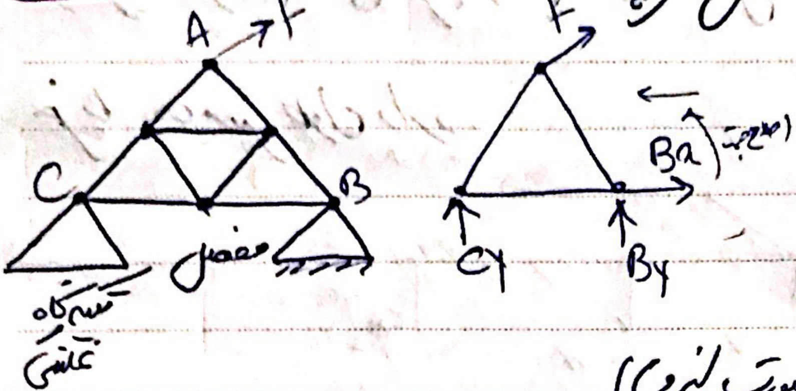
دو نیرو مساوی هم‌راستا

فشار ← C ← Compression جهت نیرو به مفاصل نزدیک می‌شود و در خلاف جهت یکدیگر

Subject ۸/
Date

تحلیل خرپاها: $\Sigma F_x=0$ ، $\Sigma F_y=0$ ← معادلات تعادل مستقل ممکن در هر مفصل ← معادله گشتاور نیازی نیست ← چون نیروها متقاطع ← معادلات تعادل برای هر مفصل در نظر بگیریم در مورد هر مفصل

استراتژی در راه کار حل مسائل خرپا



مرحله:

۱- ترسیم دیاگرام آزاد

۲- تعیین نیروهای خارجی (در صورت لزوم)

۳- تعیین (محاسبه) نیروهای داخلی اجزاء و لینک‌ها به دو روش مفصل و مقطع

نکته: در تحلیل خرپا به روش مفصل، چون نیروی لینک‌ها یکجا در همش در مفصل همرس ← معادله گشتاور نداریم ← و برای تعیین نیروهای یکسان فقط دو معادله تعادل داریم.

$$\begin{cases}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\end{cases}$$

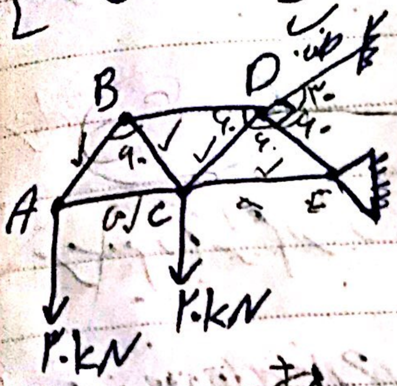
* در تحلیل خرپا به روش مفصل از مفصلی شروع می‌کنیم که در آن حداقل یک نیروی معلوم وجود داشته باشد و بیشتر از ۲ نیروی مجهول نباید وجود داشته باشد

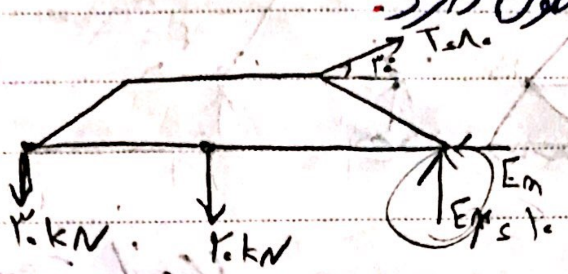
در روش مفصل تعادل را برای نیروهای وارد بر هر یک از مفصل‌ها برقرار می‌کنیم

با تعادل برای نیروهای متقاطع سر و کار داریم یعنی ۲ معادله‌ی تعادل مستقل برای تحلیل هر مفصل نیاز است

Scanned with CamScanner

مثال ۶: در شکل مقابل یک خرپا و بارهای وارد بر آن نشان داده شده است. نیرو در هر یک از اعضای خرپا را به روش مفصل ها بدست آورید. همه ی اضلاع خرپا ۵ متر طول دارد.

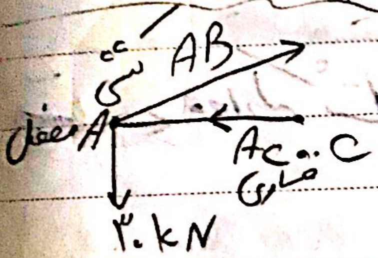




$\sum M_E = 0 \rightarrow +5T - 20\times5 - 30\times10 = 0 \Rightarrow T = 80\,kN$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -E_x + T\cos30 = 0 \Rightarrow E_x = 69.3\,kN$

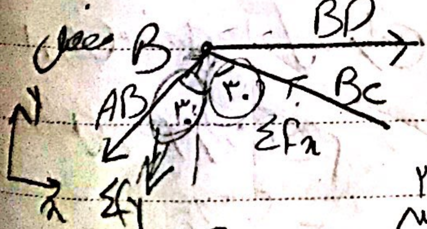
$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\sin30 - 20 - 30 + E_y = 0 \Rightarrow E_y = 10\,kN$ جهت انتخابی درست است



$\sum F_y = 0 \Rightarrow -30 + AB\sin60 = 0 \Rightarrow AB = 34.64\,kN$ (T) کششی

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -AC + AB\cos60 = 0$

$\Rightarrow AC = 17.3\,kN\ (C)$ فشاری



$\sum F_y = 0 \Rightarrow -AB\cos30 + BC\cos30 = 0$ (AB = ۳۴.۶)

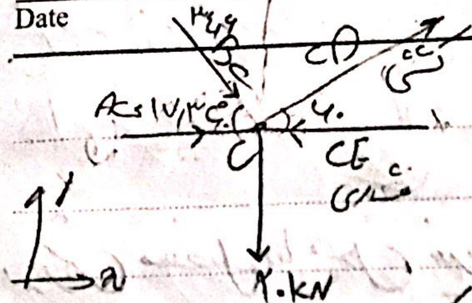
$\Rightarrow BC = 34.6\,kN$ فشاری (C)

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -AB\sin30 - BC\sin30 + BD = 0$ (AB = ۳۴.۶، BC = ۳۴.۶)

$\Rightarrow BD = 34.6\,kN\ (T)$ کششی

Scanned with CamScanner

Subject ۱۷
Date



$\sum F_y = 0 \Rightarrow -۳۴,۶ \sin ۶۰ - ۲۰ + CD \sin ۶۰ = 0$

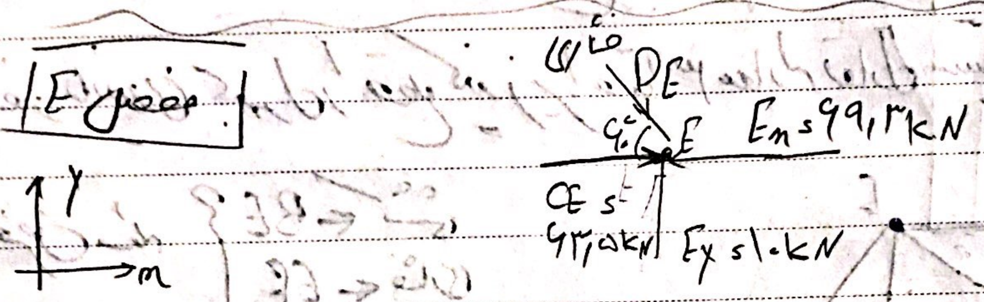
$\Rightarrow$ **CD = ۵۷,۷ kN** (T) کششی

$\sum F_x = 0 \Rightarrow +AC - CE + CD \cos ۶۰ + BC \cos ۶۰ = 0$

$\Rightarrow ۱۷,۳ - CE + ۵۷,۷ \cos ۶۰ + ۳۴,۶ = 0$

$\Rightarrow$ **CE = ۶۳,۵ kN** (C) فشاری

۳- **مفصل E**



$\sum F_y = 0 \Rightarrow ۱۰ - DE \sin ۶۰ = 0$

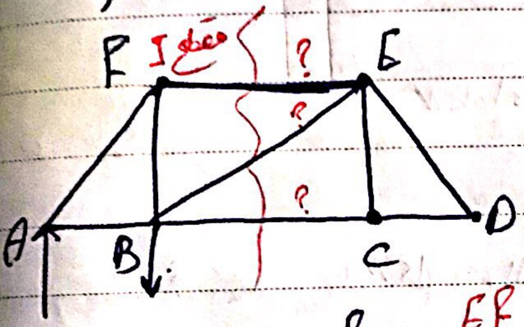
$\Rightarrow DE = ۱۱,۵$ (kN)

PAPCO

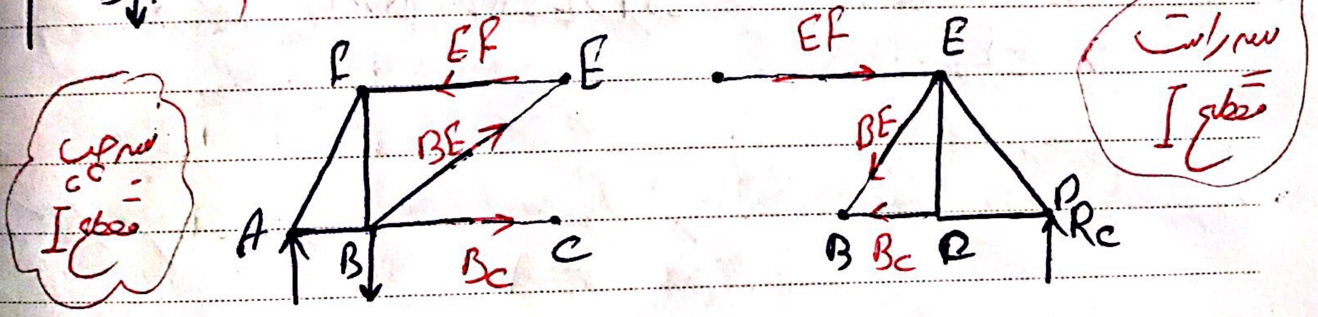
در روش مقطع ها برای نوشتن معادله ی گشتاور بهتر است مرکز گشتاور گیری در جایی انتخاب شود که تعداد بیشتری از آن نقطه بگذرد

حل خرپا با روش مقطع:

در روش مفصل ها چون نیروها متقاطع یا متقارب بودند ۲ معادله ی تعادل مستقل داشتیم اگر خرپا را با یک مقطع فرضی برش بزنیم و دیاگرام آزاد قسمتی که تحت اثر نیروی که غیر متقاطع قرار دارد را رسم کنیم معادله ی سوم یعنی گشتاور نیز استفاده می شود باید در انتخاب مقطع برش توجه شود که مقطع نباید بیش از ۳ عضو با نیروی مجهول را قطع کند زیرا فقط ۳ معادله تعادل مستقل داریم.

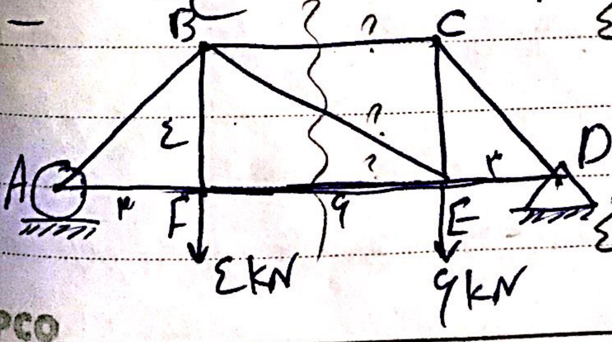


فرض مسئله:
- BE ← کششی
- EF ← فشاری
- BC ← کششی



مثال: نیرو در اعضای BC ، DE و EF را با استفاده از روش مقطع بدست آورید

چون نیروهای خارجی مولفه ی افقی وجود ندارد $\sum F_x = 0 \quad D_x = 0$



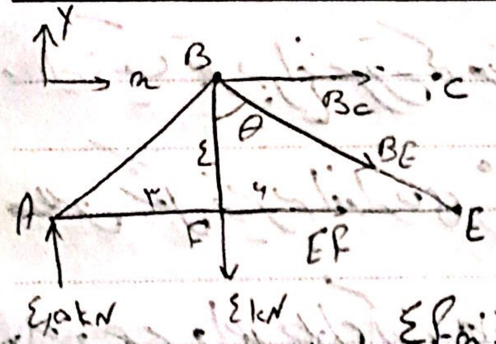
$D \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 4 - 6 + D_y = 0 \Rightarrow A_y + D_y = 10$

$\sum M_D = 0 \Rightarrow +A_y \times 12 - 4 \times 9 - 6 \times 3 = 0$

$\Rightarrow A_y = 4.5\,kN$

$\Rightarrow D_y = 10 - 4.5 = 5.5$

Scanned with CamScanner



$\Sigma M_E = 0 \Rightarrow +4{,}5 \times 9 - 4 \times 6 + BC \times 4 = 0$

$\Rightarrow BC = -4{,}13\ kN$

(جهت نیرو عکس) $\Rightarrow BC = +4{,}13\ kN\ (C)$

$\Sigma f_x = 0 \Rightarrow BC + EF + BE \sin\theta = 0$

$\sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

$\left(\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{52}} , \sin\theta = \frac{6}{\sqrt{52}}\right)$, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\frac{36}{52} + \frac{16}{52} = \frac{52}{52} = 1$

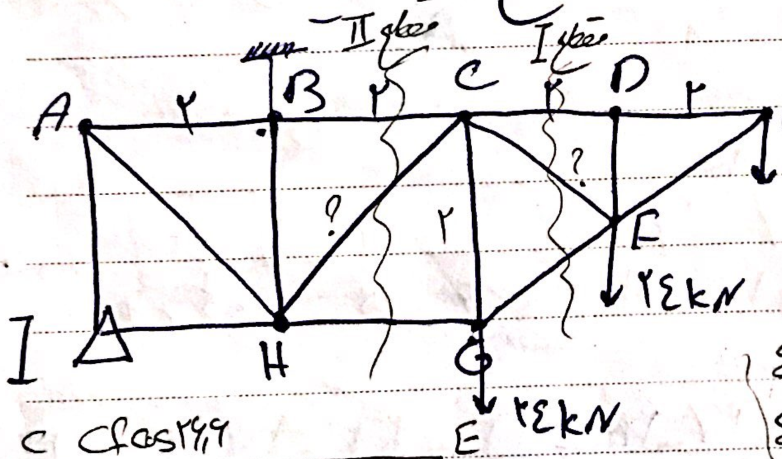
$\Sigma f_x = 0 \Rightarrow -4{,}13 + EF + BE \frac{6}{\sqrt{52}} = 0$

$\Rightarrow EF = 3{,}38\ kN\ (T)$

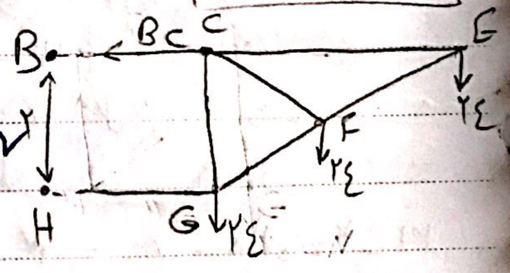
$\Sigma f_y = 0 \quad 4{,}5 - 4 - BE\cos\theta = 0$

$\Rightarrow BE = 0{,}901\ kN\ (T)$

مثال: نیرو در اعضای CH و CF را به روش مقطع بدست آورید



سمت راست مقطع II

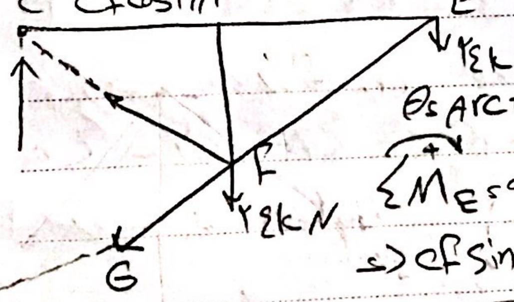


$\Sigma f_x = 0 \Rightarrow CH\cos 45^\circ - GH - BC = 0$

$\Sigma f_y = 0 \Rightarrow -24 - 24 - 24 + CH\sin 45^\circ = 0$

$\sqrt{2} \times 72 = CH$

$CH = 101{,}8\ (kN)\ (C)$



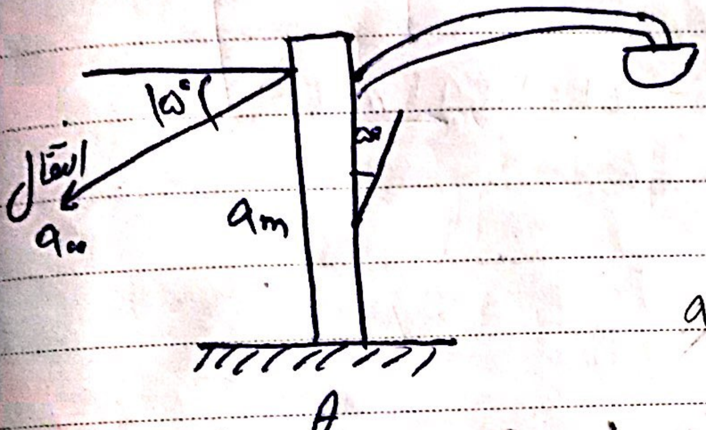
$\theta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}6$

$\Sigma M_E = 0$

$\Rightarrow CF\sin(26{,}6) \times 4 - 24 \times 2 = 0$

$CF = 26{,}81\ (kN)\ (T)$

مثال: یک تیر چراغ برق که مدت زیادی تحت نیروی کششی 900 N قرار داشته مطابق شکل زیر به اندازه‌ی $5°$ از وضعیت قائم منحرف شده است ارتفاع تیر 9m و جرم واحد طول آن $24 \, kg/m$ است نیروهای عکس العمل زمین را در نقطه‌ی A بدست آورید جرم بازوی نگه دارنده‌ی لامپ قابل چشم پوشی است.



$A_x = 900 \cos 15$

$A_y = mg + 900 \sin 15$

$M_A - mg \times 4.5 \sin 5° - 900$

فصل ۴: ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۳ - ۱۵ - ۱۸ - ۲۰ - ۲۱

۲۲ - ۲۵ - ۲۷ - ۳۲ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳

۴۵ - ۴۶ - ۴۸ - ۵۰ - ۵۲

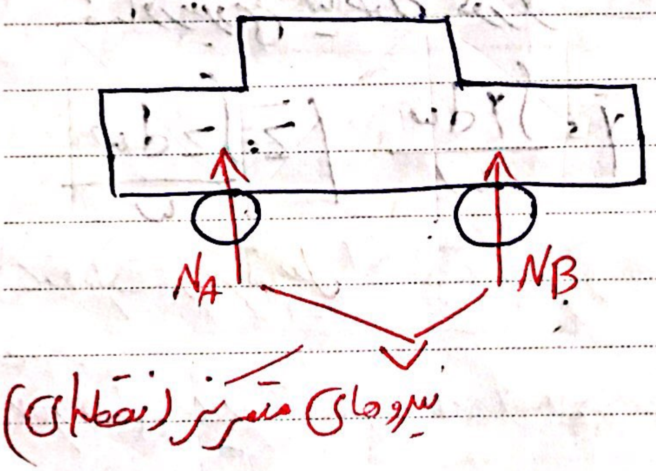
PAPCO

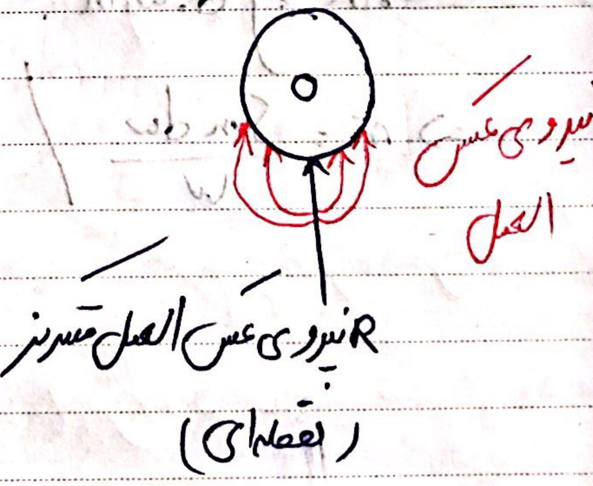
Scanned with CamScanner

فصل پنجم:

نیروهای گسترده:

در عمل نیروی متمرکز به مفهوم دقیق کلمه وجود ندارد زیرا هر نیروی خارجی به طور مکانیکی بر جسم وارد می‌شود روی سطح تماس محدودی هر چند کوچک گسترده است اگر ابعاد ناحیه‌ای که نیروها بر آن وارد می‌شود در مقایسه با سایر ابعاد مربوطه مسئله قابل چشم‌پوشی نباشد باید با جمع زدن اثرات نیروی گسترده روی کل آن ناحیه نحوه‌ی واقعی توزیع نیرو را منظور کنیم برای این کار از روش انتگرال گیری ریاضی استفاده می‌کنیم و بدین منظور باید شدت نیرو در هر نقطه را بدانیم:

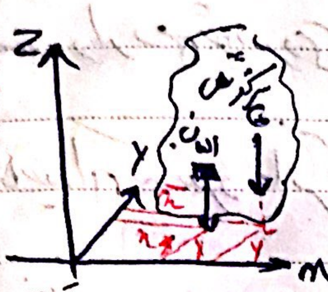




$R \approx W$

مرکز جرم:

گشتاور نیروی برآیند W حول هر محور برابر است با مجموع گشتاورهای المان‌های نیرو «dw» وارد بر تمامی اجزای جسم حول همان محور



m جرم کل — sum جمع

W وزن کل $\quad W = \int dw$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ مختصات مرکز ثقل $\quad \bar{y} = \frac{\int y\,dw}{W} \Leftarrow \int_0^m dw \cdot y = W \cdot y \rightarrow$ گشتاور W نسبت به x

x, y, z مختصات المان مورد نظر $\quad \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dw}{W} \Leftarrow W \cdot \bar{x} = \int dw \cdot x$ گشتاور W نسبت به y

★ بر اساس اصل گشتاور و قضیه وارینیون:

گشتاور نیروی W حول محور y: $\quad W \cdot \bar{x} = \int d w \cdot x$

$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dw}{W} \quad / \quad \bar{y} = \frac{\int y\,dw}{W} \quad / \quad \bar{z} = \frac{\int z\,dw}{W}$

مختصات مرکز ثقل

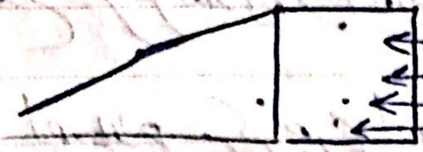
شدت نیرو:

۱- شدت نیروی خطی: $\left[\frac{N}{m}\right]$

شدت نیروی خطی مشابه نیروی اعمال شده عمودی بر سیم یک کابل

Scanned with CamScanner

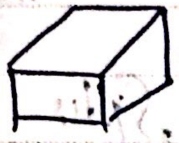
۲- سطحی: نیروی حاصل فشار آب پشت سد $\left[\frac{N}{m^2}\right]$



نیروی اعمالی از آب به پشت سد

نیروی حاصل از فشار آب: $f = W \times A = WA \; [N]$ (W: N/m^2)

۳- شدت نیروی حجمی: نیروی حاصل از ثقل (وزن کل حجم) $\left[\frac{N}{m^3}\right]$



$dV = 1cm^3$

$[f] = 0.15 \; N/cm^3$

ساده ترین نوع توزیع حجمی نیرو مربوط به وزن جسم است که در کل حجم جسم گسترده است

محاسبات مرکز هندسی:

در معادلات «*» هیچ اثری از جاذبه‌ی ثقل یا g وجود ندارد بنابراین این معادلات معرف نقطه‌ی خاصی از جسم هستند که محل آن فقط به نحوه‌ی توزیع جرم بستگی دارند این نقطه را مرکز جرم می‌گوییم اگر چگالی جسم در حجم آن یکنواخت باشد عامل ثابتی خواهد بود که در معادلات «*» از صورت و مخرج حذف می‌شود عباراتی که باقی می‌مانند صرفاً معرف ویژگی هندسی جسم هستند زیرا هیچ اثری از خواص جرمی در آن دیگر نمی‌ماند وقتی که در محاسبات فقط با شکل هندسی سروکار داریم

Subject
Date

اصطلاح مرکز ثقل را به کار می‌بریم در حالی که از جسم فیزیکی واقعی صحبت

کنیم از اصطلاح مرکز جرم استفاده می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dw}{w} \rightarrow \bar{x} = \frac{\int x g\,dm}{mg} \rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dm}{m} * \rightarrow \bar{x} = \frac{\int x \rho\,dV}{\rho V} \rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dV}{V} **$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dw}{w} \rightarrow \bar{y} = \frac{\int y g\,dm}{mg} \rightarrow \bar{y} = \frac{\int y\,dm}{m} * \rightarrow \bar{y} = \frac{\int y\,dV}{V} \rightarrow \bar{y} = \frac{\int y\,dV}{V} **$$

$$\bar{z} = \frac{\int z\,dw}{w} \rightarrow \bar{z} = \frac{\int z g\,dm}{mg} \rightarrow \bar{z} = \frac{\int z\,dm}{m} * \rightarrow \bar{z} = \frac{\int z\,dV}{V} \rightarrow \bar{z} = \frac{\int z\,dV}{V} **$$

مرکز ثقل مختصات

$w = mg$

مختصات مرکز جرم

$\rho = \frac{m}{V}$

$dw = g\,dm$

$m = \rho . V \rightarrow dm = \rho\,dV$

مختصات مرکز هندسی

نکته: اگر چگالی جسم یکنواخت باشد مرکز هندسی و مرکز جرم بر یکدیگر منطبق هستند ولی

اگر چگالی متغیر باشد این ۲ نقطه در حالت کلی بر یکدیگر منطبق نیستند

ρ مقدار ثابتی خواهد بود و از مخرج و صورت حذف می‌شود و عبارتی که باقی می‌ماند صرفاً مربوط به

ویژگی هندسه جسم هستند و هیچ اثری از خواص جرمی در این روابط وجود ندارد.

PAPCO

Scanned with CamScanner

بر حسب آنکه شکل هندسی جسم را می‌توان به صورت خط یا سطح یا حجم مدل‌سازی نمود کرد

روش محاسبه‌ی مرکز هندسی را می‌توان به ۳ دسته تقسیم‌بندی کرد

$dv = dx.dy.dz$

1D

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dl}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dl}{L} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dl}{L}$$

مختصات هندسی مرکز خط

$\bar{z}$ و $\bar{y}$ و $\bar{x}$ ← مرکز خط

2D

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dA}{A}$$

مختصات هندسی مرکز سطح

$\bar{z}$ و $\bar{y}$ و $\bar{x}$ ← مختصات مرکز سطح

3D

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dv}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dv}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dv}{V}$$

مختصات هندسی مرکز یک حجم

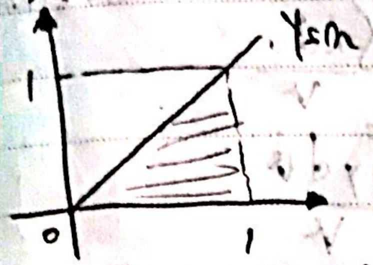
$\bar{z}$ و $\bar{y}$ و $\bar{x}$ ← مختصات مرکز حجم

۵ راه کار کلی برای انتخاب المان:

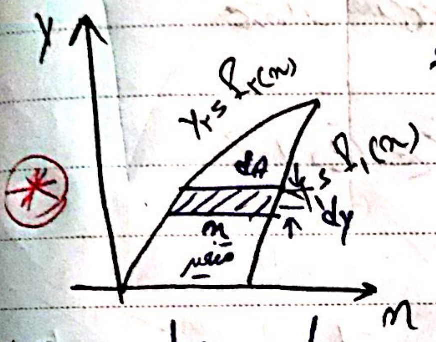
۱- انتخاب المان با مرتبه‌ی کمتر

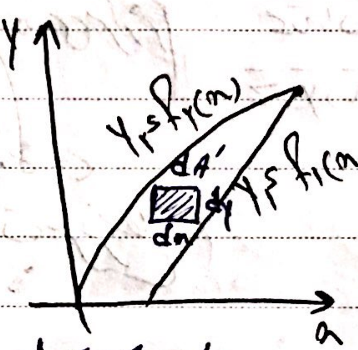
نکته ۱: مرتبه‌ی المان باید المان دیفرانسیلی مرتبه‌ی اول انتخاب کرد و آن را به المان مرتبه‌ی بالاتر جمع را تا فقط با یکبار انتگرال‌گیری کل شکل پوشانده شود. برای مثال در شکل زیر المان اصلی مرتبه‌ی اول به مساحت $dA = x.dy$ را به عنوان المان سطح انتخاب

می گیریم تا کل سطح فقط با یکبار انتگرال گیری نسبت به y پوشانده شود درحالی که المان سطح به ترتیب می دهیم $dA = dx.dy$ و به ۲ انتگرال گیری یکبار نسبت به x و یکبار نسبت به y نیاز دارد.



$$\int f(x)\,dx \rightarrow \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$





ساخت المان $dA = x.dy \rightarrow A = \int x\,dy$

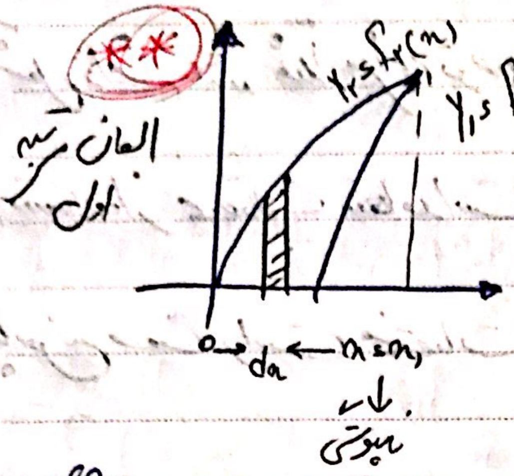
$dA = dx.dy$

$A = \iint dx\,dy$

۲- پیوستگی:

درصورت امکان باید المانی انتخاب کنیم که با یک انتگرال گیری پیوسته بتوانیم کل شکل را بپوشانیم به طور مثال المان افقی در شکل قبل را با المان قائم در شکل صفحه ی بعد

ترجیح می‌دهیم چرا که در صورت استفاده از المان قائم به دلیل ناپیوستگی در x_1, x_2 نیاز به ۲ انتگرال‌گیری جداگانه داریم



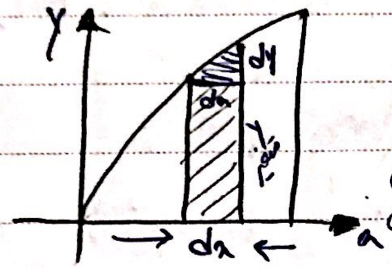
$$\int_0^{x_1} (\ )\,dx + \int_{x_1}^{x_2} (\ )\,dx$$

ناپیوستگی

۲ تا باید انتگرال بگیریم تا پیوسته شود

$$A=\int_{x_1}^{x_2} f_1(x) - f_2(x)$$

۳- حذف جملات با مرتبه‌ی بالاتر:



$dA = y.dx$

$dA' << dA$

المان مثلث $dA' = \frac{1}{2}\, dx\, dy$ → المان مرتبه دوم

همیشه می‌توان از جملات مرتبه‌ی بالاتر در مقایسه با جملات مرتبه‌ی پایین‌تر صرف نظر کرد. در شکل زیر مساحت المان قائم به صورت جمله‌ی مرتبه اول $dA=y.dx$ بیان می‌شود و از سطح مثلث کوچک با جمله‌ی $dA'=\frac{1}{2}dx.dy$ صرف نظر می‌گردد البته در حدگیری خطایی ایجاد نمی‌شود.

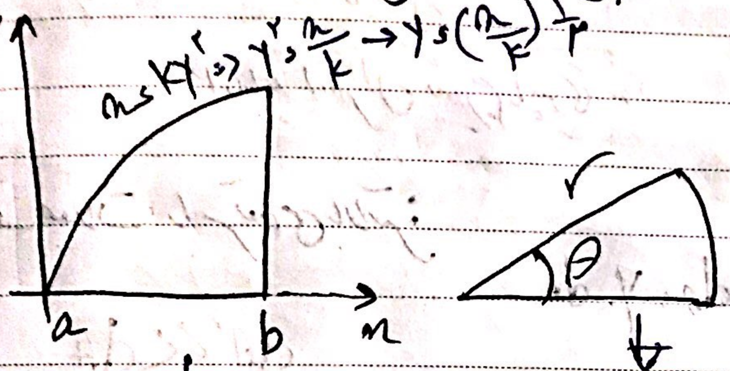
Scanned with CamScanner

Subject
Date

۶- انتخاب دستگاه مختصات:

به عنوان یک قاعده کلی دستگاه مختصاتی انتخاب می‌کنیم که بیشترین سازگاری را با مرزهای شکل داشته باشد مثلاً برای توصیف مرزهای سطح شکل پایین چپ آسان‌ترین روش استفاده از مختصات متعامد است درحالی که برای مرزهای قطاع دایره‌ای در شکل پایین سمت راست مختصات قطبی مناسب‌تر است

$x = ky^2 \Rightarrow y^2 = \frac{x}{k} \rightarrow y = \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$



مختصات دکارتی (x, y)

مختصات قطبی (r, θ)

استوانه (r, θ, z)

$\int_a^b \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{2}} dx$

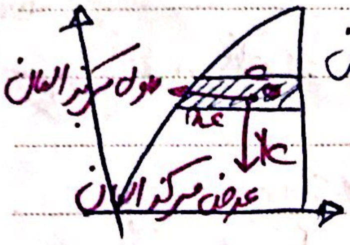
Subject
Date

۵- مختصه‌ی مرکز المان:

پس از انتخاب المان دیفرانسیلی مرتبه‌ی اول یا دوم برای تعیین گشتاور آن باید بازوی گشتاور را با استفاده از مختصات مرکز المان در (x_c و y_c) مشخص کرد

به طور مثال گشتاور المان dA حول محور yA برابر است با $x_c . dA$ که در آن x_c مختصه‌ی مرکز المان یعنی نقطه‌ی C می‌باشد.

dA



المان ← المان سطحی ← مهم در المان ← مرکز المان

گشتاور المان سطحی حول محور y ⟸ $x_c . dA$

گشتاور المان سطحی حول محور x ⟸ $y_c . dA$

فرمول‌های لازم برای حل مسائل:

خط

$\bar{x} = \frac{\int x_c \, dL}{L}$

$\bar{y} = \frac{\int y_c \, dL}{L}$

$\bar{z} = \frac{\int z_c \, dL}{L}$

L: طول کل خط

$\bar{x}$ و $\bar{y}$ و $\bar{z}$ مرکز خط

x_c و y_c و z_c مرکز المان خط

المان باید خطی باشد

سطح

$\bar{x} = \frac{\int x_c \, dA}{A}$

$\bar{y} = \frac{\int y_c \, dA}{A}$

$\bar{z} = \frac{\int z_c \, dA}{A}$

$\bar{x}$ و $\bar{y}$ و $\bar{z}$ مرکز سطح

x_c و y_c و z_c مرکز المان سطحی

A: مساحت کل جسم

المان باید سطحی باشد

حجم

$\bar{x} = \frac{\int x_c \, dV}{V}$

$\bar{y} = \frac{\int y_c \, dV}{V}$

$\bar{z} = \frac{\int z_c \, dV}{V}$

V: حجم کل جسم

$\bar{x}$ و $\bar{y}$ و $\bar{z}$: مختصات مرکز حجم

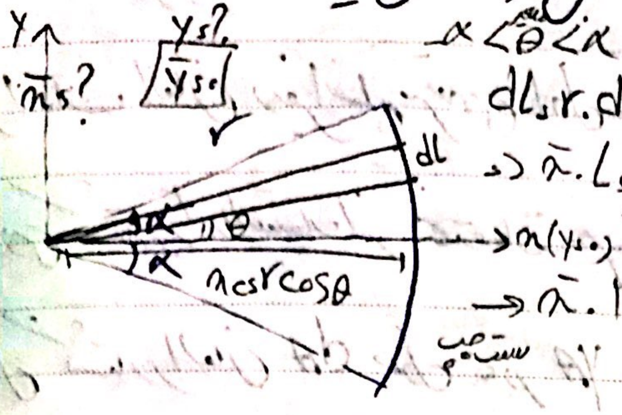
x_c و y_c و z_c: مختصات مرکز المان

المان باید حجمی باشد

Subject

Date: چون قوس نسبت به محور x ها متقارن است (y=0)

مثال: مرکز قوس دایره ای شکل مقابل را مشخص کنید.



$-\alpha < \theta < \alpha$

$dL = r.d\theta$

$\Rightarrow \bar{x}.L = \int x_c . dL$

$\Rightarrow \bar{x}.2r\alpha = \int r\cos\theta\, r.d\theta$

سمت چپ

$= r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta = r^2 [\sin\theta]_{-\alpha}^{\alpha}$

$\bar{x} = \dfrac{\int x_c\, dL}{L}$

$= r^2 [\sin\alpha - (\sin(-\alpha))]$ $(-\sin\alpha)$

$\bar{x}.L = \int x_c . dL$ سمت راست . سمت چپ $= 2r^2 \sin\alpha$ سمت راست

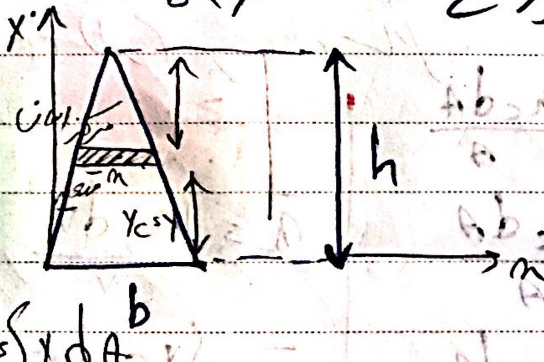
$\Rightarrow \bar{x}.2r\alpha = 2r^2 \sin\alpha$

طول کل قوس $L = 2r\alpha$

$\Rightarrow \bar{x} = \dfrac{r\sin\alpha}{\alpha}$ $\quad \bar{y} = 0$

$\bar{y}(\frac{1}{2}bh) = \int_0^h y \frac{b}{h}(h-y)\,dy = \frac{bh^2}{6} \Rightarrow \bar{y} = \frac{h}{3}$

مثال: در مثلثی به ارتفاع h فاصله ی مرکز سطح از قاعده ($\bar{y}$) چقدر است؟



$\bar{y}A = \int y\, dA$

$dA = x\, dy$

$A = \frac{1}{2}bh$

$\frac{x}{b} = \frac{(h-y)}{h}$

$x = \frac{b}{h}(h-y) = b(1-\frac{y}{h})$

$yA = \int y\, dA$

$dA = x\,dy$ $\quad A = \frac{1}{2}bh$

$A = \frac{1}{2}bh$ $\quad \frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$

$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$ $\quad \bar{y}(\frac{1}{2}bh) = \int_0^h y \frac{b}{h}(h-y)\,dy = \frac{bh^2}{6}$

$x = \frac{b}{h}(h-y)$

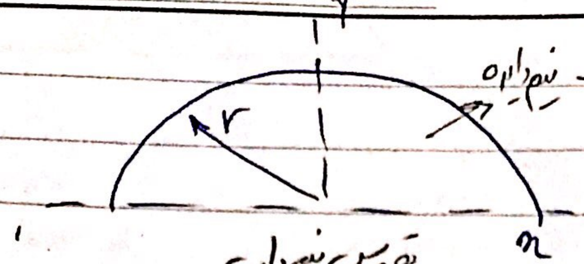
$\bar{y} = h/3$

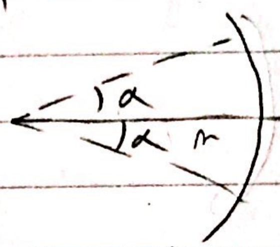
PAPCO

$\bar{y}(\frac{1}{2}bh) = \int_0^h y \frac{b}{h}(h-y)\,dy = \frac{bh^2}{6} \Rightarrow \bar{y} = h/3$

Scanned with CamScanner

مثال: قوس نیم دایره





$\bar{x} = ?$ → $\bar{x} = 0$

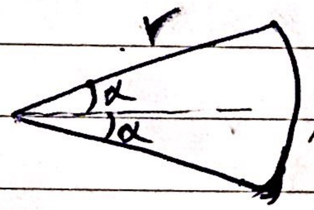
$\bar{y} = ?$

$$\bar{y} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha} \Rightarrow \bar{y} = \frac{r\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2r}{\pi}$$

نکته برای مثال بعدی:

در مثلث ها مرکز سطح مثلث در محل تلاقی میانه های آن قرار دارد که فاصله ی این نقطه از هر ضلع مثلث معادل $\frac{1}{3}$ ارتفاع وارد بر همان ضلع است

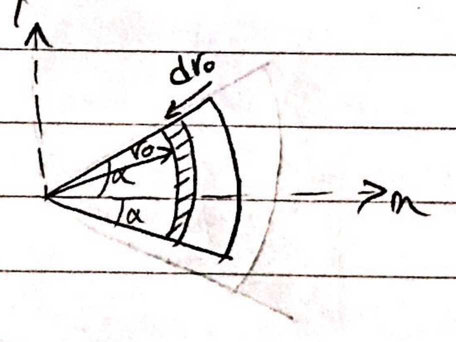
مثال:



مختصات مرکز سطح $y = 0$ $\bar{x} = ?$

چون نسبت به محور x متقارن

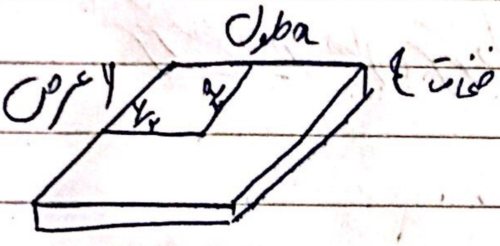
$0 < r_0 < r$ شعاع متغیر از

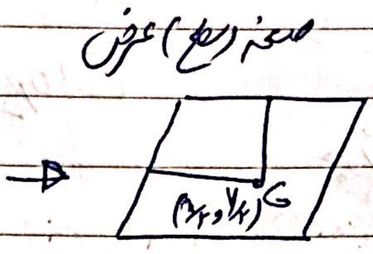


x
مرکز المان

تعیین مرکز سطوح مرکب:

مرکز ثقل ورق: ورق قطعه‌ای است که ضخامت آن یکنواخت است و معمولاً ضخامت آن در مقابل طول و عرض آن قابل صرف‌نظر است در چنین حالتی مرکز ثقل ورق (sheet) در وسط ضخامتش بوده و برای تعیین طول و عرض مرکز ثقل کافی است مرکز سطح ورق را تعیین نمود





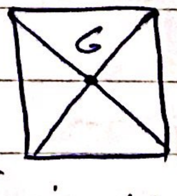
G مرکز ثقل

فرض: حجم تعمیم

کلی‌تر مرکز سطح ورق = $a/2$ و $b/2$ و $t/2$

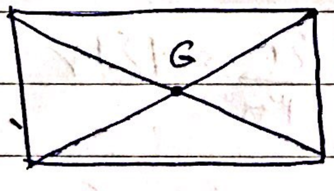
مرکز سطح اشکال ساده هندسی:

۱- مربع



G: مرکز سطح و ثقل برخورد قطرها

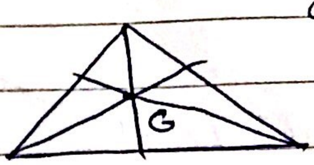
۲- مستطیل



مرکز سطح و ثقل برخورد قطرها

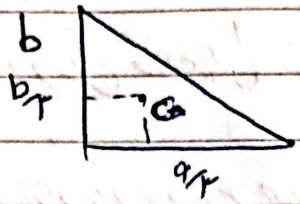
Year. Month. Day. Subject.

۳- مثلث

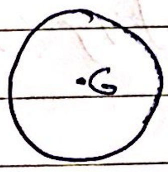


مرکز سطح محل برخورد میانه

۴- مثلث قائم الزاویه

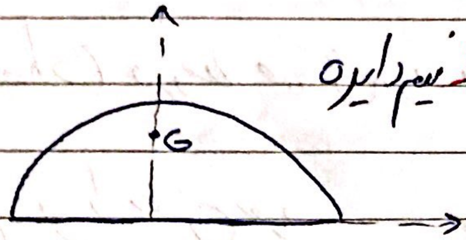


۵- دایره



مرکز سطح دایره همان مرکز دایره است

۶- نیم دایره



$x = 0$

چون نسبت به محور y ها متقارن

$\bar{Y} = \frac{4r}{3\pi} = 0.424r$

r: شعاع دایره

۷- ربع دایره

$\bar{X} = \frac{4r}{3\pi} = 0.424r$

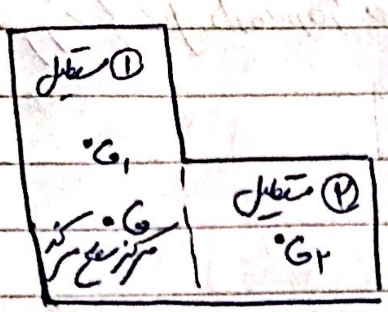
$\bar{Y} = \frac{4r}{3\pi} = 0.424r$

r: شعاع دایره

iman NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

تعیین مرکز سطح مرکب:



سطح مرکب سطحی است که از چند سطح ساده تشکیل شده است برای تعیین مرکز سطح یک سطح مرکب ابتدا مرکز سطح هر یک از سطوح ساده را تعیین کرده و از فرمول های زیر مختصات مرکز سطح کلی یا همان مرکب بدست می آید.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i x_i}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_i}{A}$$

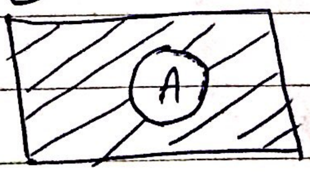
x_i, y_i: طول و عرض مرکز هر کدام از سطوح ساده

A_i: مساحت هر کدام از اشکال ساده

A = مساحت کل حجم مرکب

$\bar{x}$ و $\bar{y}$: مرکز سطح مرکب

★نکته: اگر قسمتی از ورق به صورت حفره یا سوراخ خالی باشد در این صورت سطح قسمت خالی را منفی در نظر می گیریم



مساحت کل $A = A_1 - A_2$

مرکز سطح مرکب $\bar{x} = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2}{A}$

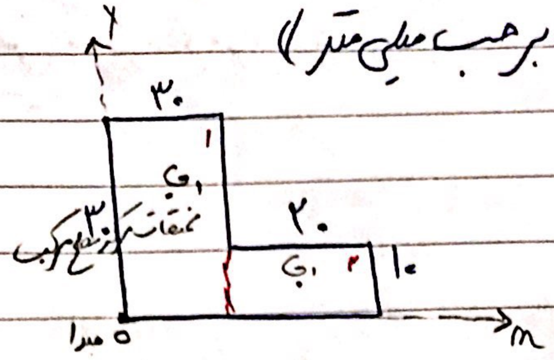
$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A}$$

iran NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Year. Month. Day. Subject.

مثال) مرکز سطح شکل داده شده را تعیین کنید (واحد ها بر حسب میلی متر)



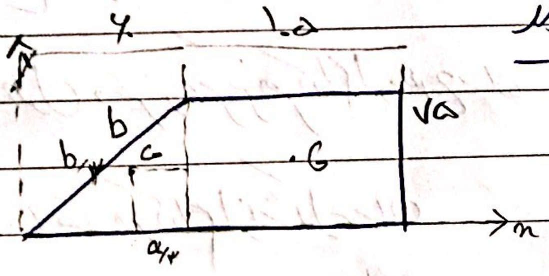
مختصات مرکز سطح ساده

	A	x	y
سطح ساده ۱	۹۰۰	۱۵	۱۵
سطح ساده ۲	۲۰۰	۴۰	۵

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i x_i}{A} \qquad \bar{x} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2}{A} = \frac{900\times15 + 200\times40}{1100} = 19.5\ mm$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_i}{A} \qquad \bar{y} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2}{A} = \frac{900\times15 + 200\times5}{1100} = 13.2\ mm$$

مثال) مختصات مرکز سطح مرکب زیر را بدست آورید



	A	x	y
سطح ۱	۳۲۵۰ ½×۷۵×[illegible]	۲/۳×۶۰=۴۰	۲۵ (⅓×۷۵)
سطح ۲	۷۸۷۵	۵۲٫۵	۳۷٫۵

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i x_i}{A} \qquad \bar{x} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2}{A} = \frac{2,250\times40 + 7,875\times112.5}{10125} = 94.38\ mm$$

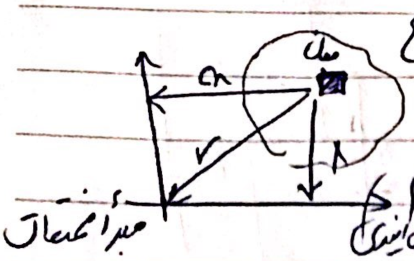
$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i y_i}{A} \qquad \bar{y} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2}{A} =$$

iman NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Year. Month. Day. Subject.

ممان اینرسی گشتاور دوم سطح:



$I_x = \int_A y^2 dA$ گشتاور دوم سطح

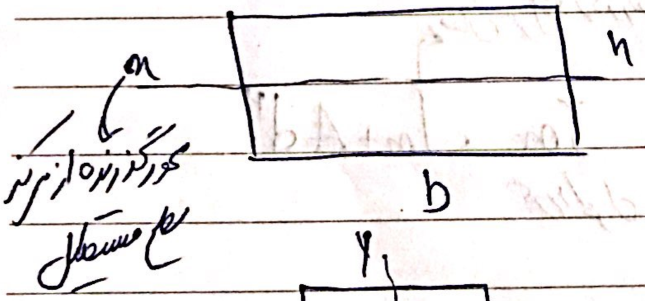
$I_y = \int_A x^2 dA$ گشتاور دوم سطح (ممان اینرسی)

ممان قطبی $J = \int_A r^2 dA$; $J = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA$

$r^2 = x^2 + y^2$ واحد (بعد) ممان اینرسی: $I \rightarrow [L^4]$ m^4 یا cm^4 یا mm^4 یا in^4

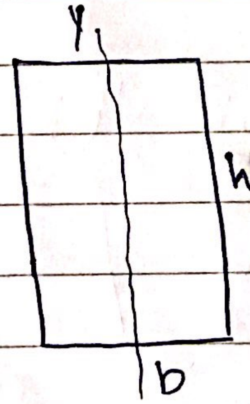
$\underbrace{\int_A x^2 dA}_{I_y} + \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x} = I_x + I_y$

ممان قطبی $J = I_x + I_y$



$I_x = \frac{1}{12} b h^3$

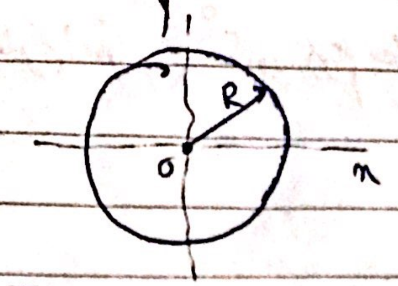
(b: ضلع موازی با محور x ؛ h: ضلع عمود بر محور x)



y: محور گذرنده از مرکز سطح مستطیل

$I_y = \frac{1}{12} \times h \times b^3 = \frac{1}{12} b^3 h$

Scanned with CamScanner



ممان قطبی دایره ⊲ $J = \frac{\pi}{2} R^4$

R: شعاع دایره

$I_x = ?$

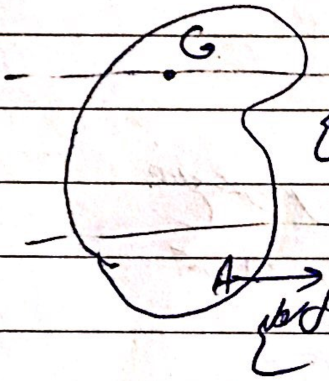
$I_y = ?$ $J = I_x + I_y$ $I_x = I_y$

★ چون دایره نسبت به محور متقارن

$J = 2I_x$ یا $J = 2I_y$

$I_x = J/2 = \frac{\pi}{4} R^4$ $I_y = \frac{\pi}{4} R^4$

قضیه محورهای موازی:



$\bar{x}$ محور گذرنده از مرکز سطح

ممان حول محور گذرنده از مرکز سطح

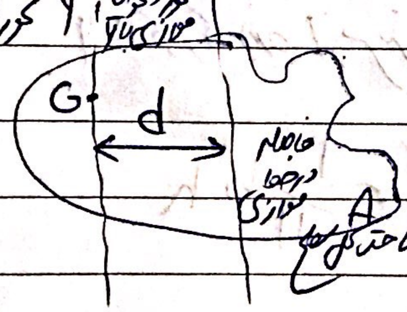
x محور دلخواه موازی با $\bar{x}$

$I_x = \bar{I}_x + Ad^2$

محور دلخواه

A مساحت سطح

$\bar{y}$ محور گذرنده از مرکز سطح ، y محور دلخواه موازی با $\bar{y}$



فاصله دو محور موازی

مساحت کل سطح

محور دلخواه

$I_y = \bar{I}_y + Ad^2$

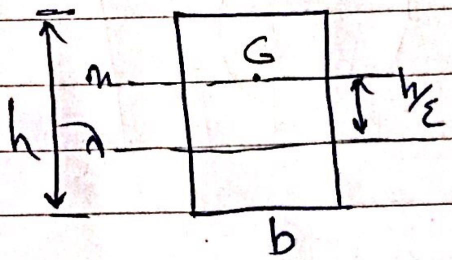
محور گذرنده از مرکز سطح

NOTEBOOK iman

Scanned with CamScanner

Year. Month. Day. Subject.

مثال) ممان اینرسی مستطیل حول محور λ (I_λ) را بدست آورید.



$I_x = \frac{1}{12}bh^3$

$I_\lambda = I_x + Ad^2 = \frac{1}{12}bh^3 + hb\cdot\frac{h^2}{16} = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{16}$

$\Rightarrow I_\lambda = \frac{7bh^3}{48}$

$I_m = I_x + Ad^2$

محور دلخواه ← I_m ، $I_x \rightarrow \frac{1}{12}bh^3$

NOTEBOOK

Scanned with CamScanner